# I-5　微視的変動を考慮に入れた変形の表現について

東北大学　正員　岸野佑次

## 1. はじめに

材料の変形は，微視的に観察すれば，本来，滑らかな関数では表わすことのできないような変動を含んでいるので，巨視的な連続体力学を構成するためには，現実の材料の代りに，ある種の理想化されたモデルを用いることが必要であると考えられる。材料の微視的構造を考慮に入れた連続体力学としては，近年，いわゆる「一般化された連続体力学[1]」として，種々の研究がなされている。しかし，これらの理論における微視的な変形の自由度の意味は，金属材料の転位などの欠陥分布に対応したもの以外は，必ずしも明確ではないように思われる。

本文では，巨視的な変形は微視的変動を含んだ変形の平均として現われることに着目し，先ず，ある場における量の平均化の方法について説明し，次に，これを変形の場に適用し，このような平均的変形を生じる材料モデルの空間の構成について述べ，微視構造に起因する量につき若干の考察を加えた結果を示した。

## 2. 場の量の平均化

あるスカラー $\varphi$ の定義された空間Mのある有界閉領域 $R_0$ において，$\varphi$ をいくつかのパラメーターをもつ平均的な関数 $\psi$ により近似することを考えると，$R_0$ 上の関数空間のノルムを内積により与えることとすれば，

$$I=\int_{R_0}(\varphi-\psi)^2\,dv \qquad (1)$$

を最小とする条件によりパラメーターの値が決定される。

今，$\psi$ が $n$ 個の独立な関数 $\psi_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の係数 $\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ による線形結合

$$\psi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi_i \qquad (2)$$

により表わされる場合は，(1)式の $I$ を最小とする条件

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha_i}=-2\int_{R_0}\Big(\varphi-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi_j\Big)\psi_i\,dv=0 \qquad (3)$$

より，$\alpha_i$ に関する連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{R_0}\psi_j\psi_i\,dv=\int_{R_0}\varphi\psi_i\,dv \qquad (4)$$

が得られ，これより $\alpha_i$ が求まる。

$\varphi$ が不連続性を併った微視的変動量（確率論的に分布しているものする）であるとすると，$I/v_0$（$v_0$：領域 $R_0$ の体積）は $\varphi$ と $\psi$ の残差の二乗平均，即ち，分散を表わしているものと考えられ，確率論的に，$v_0\to$ 小 のとき $I/v_0\to$ 大 となる。一方，一般に，$\varphi$ は空間 M 上の巨視的勾配をもった量であるので，$v_0\to$ 大 のときも $I/v_0\to$ 大 となる。このことから $I/v_0$ を最小にするような適当な体積 $v_0$ をもつ領域 $R_0$ が存在するものと考えられる。

ベクトル場については，あるベクトル $\mathbf{a}$ の $R_0$ における平均的なベクトル値関数 $\mathbf{b}$ により近似するために

$$I=\int_{R_0}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,dv \qquad (5)$$

とおき，これを最小にする $\mathbf{b}$ が求めるベクトルである。

## 3. 変形の平均的表現

ある材料（内部の点を位置ベクトル $\mathbf{x}$ で表わす）が微視的な不連続性を含む変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を受けたとする。材料は巨視的に等方均質であると仮定し，以下，平均をとる有界閉領域 $R_0$ を各点Pを中心とする半径 $\rho_0$（一定）の球に選ぶこととする。

先ず，変位は，$R_0$ 内で一定と考えて，Pにおける変位の平均的ベクトルを求めることとする。求めるベクトルを次のようにおく。

$$\bar{\mathbf{u}}=\bar{u}^i\mathbf{e}_i \qquad (6)$$

ここに，$\mathbf{e}_i$ $(i=1,2,3)$ は空間に固定したデカルト座標系の基底ベクトルとする。また，右辺の上下同一の指標は $i=1,2,3$ について和をとるものとする。（以下同様）(5)式において，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ を，それぞれ，$\mathbf{u}$，$\bar{\mathbf{u}}$ とみなせば，$I$ を最小とするパラメーター $\bar{u}^i$（Pにおける平均的変位ベクトルの成分）は

$$\bar{u}^i=\frac{3}{4\pi\rho_0^3}\int_{R_0}u^i\,dv \qquad (7)$$

により与えられる。

次に，Pでの平均的変形を求めるために，(5)式で

$$\mathbf{a}=\mathbf{u},\quad \mathbf{b}=(u_0^j+\rho_0 n^i\gamma_i^j)\mathbf{e}_j \qquad (8)$$

とおき（$n$ は方向余弦），$R_0$ の代りに $\partial R_0$ 上の積分

$$I=\oint_{\partial R_0}\{u^j-(u_0^j+\rho_0 n^i\gamma_i^j)\}\{u_j-(u_{0j}+\rho_0 n^i\gamma_{ij})\}\,da \qquad (9)$$

を考えると，$I$ を最小とするには，$\partial I/\partial\gamma_i^j=0$ より

$$\gamma_i^j=\frac{3}{4\pi\rho_0^3}\oint_{\partial R_0}n_i u^j\,da \qquad (10)$$

を得る。特に，$u^i$ が $C^1$ 級関数ならば，(7)，(10)式より

$$\gamma_i^j=\frac{3}{4\pi\rho_0^3}\int_{R_0}\partial_i u^j\,dv=\partial_i\bar{u}^j \qquad (11)$$

と変形できるが，一般には $\gamma_i^{\cdot j} \neq \partial_i \bar{u}^j$ である。

材料内の各点について本節で述べたような平均化を行なって得られる量 $\bar{u}^i$, $\gamma_i^{\cdot j}$ の場は 不連続性のない充分滑らかな場であると考えられる。

## 4. 平均的変形により形成される空間

材料内各点に与えられる2種の平均的変形を表わすテンソル $\partial_i \bar{u}^j$, $\gamma_i^{\cdot j}$ は 前述のように $u^i$が $C^1$級関数の場合に一致し，このとき，後者も変形の適合条件を満すことになるが，一般には，後者は適合条件を満す必要はないものと考えられる。本節では，$\gamma_i^{\cdot j}$ により形成される空間の性質について述べる。

先ず，変形前の材料内各点をデカルト座標系 $X^i$ ($i=1,2,3$)で表わすこととすれば，線素 $dX^i$ は次式で表わされる線素に(平均的に)変形する。

$$\omega^i = A_j^{\cdot i}\, dX^j \qquad (12)$$

ここに，

$$A_j^{\cdot i} = \delta_j^i + \gamma_j^{\cdot i} \qquad (13)$$

($\delta_j^i$ はクロネッカーのデルタ)

$\gamma_j^{\cdot i} = \partial_j \bar{u}^i$ の場合は $\omega^i = dx^i$ とおくことができ，$x^i = x^i(X)$ は変形前$X$にあった点の変形后の点のデカルト座標系での座標値を示し，従って，$x^i$ ($i=1,2,3$) はホロノームな座標系[2]となるが，$\gamma_j^{\cdot i} = \partial_j \bar{u}^i$ とおくことのできない場合は，$\omega^i$ をホロノームな座標の全微分で表わすことはできない。

今，変形前后におけるある任意の点の座標値が同じ値になるように座標系を選ぶこととし，これを

$$x^\kappa = \delta_i^\kappa X^i \quad (\kappa=1,2,3) \qquad (14)$$

とおけば，$x^\kappa$ はホロノームな座標系である。更に，

$$A_\kappa^{\cdot i} = \delta_\kappa^j A_j^{\cdot i} \qquad (15)$$

とおけば，(12)式より次式を得る。

$$\omega^i = A_\kappa^{\cdot i}\, dx^\kappa \qquad (16)$$

線素 $\omega^i$の長さを $ds$ とすれば，

$$ds^2 = \delta_{ij}\,\omega^i\omega^j = \delta_{ij} A_\kappa^{\cdot i} A_\lambda^{\cdot j}\, dx^\kappa dx^\lambda \qquad (17)$$

より，座標系 $x^\kappa$ の計量テンソルは

$$g_{\kappa\lambda} = \delta_{ij} A_\kappa^{\cdot i} A_\lambda^{\cdot j} \qquad (18)$$

により与えられる。また，$\omega^i$は，非ホロノーム的であるにせよ，3次元ユークリッド空間内で変形を受けた後のベクトルであり，よって，2つのベクトル $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ は $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i$ のときに平行であると考えられることから，座標系 $x^\kappa$ の接続係数は

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = A_i^{\cdot\kappa}\,\partial_\mu A_\lambda^{\cdot i} \qquad (19)$$

により与えられる。ここに，$A_i^{\cdot\kappa}$は $A_\kappa^{\cdot i}$ の逆マトリックスである。捩率テンソル

$$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\kappa} = A_i^{\cdot\kappa}\,\partial_{[\mu} A_{\lambda]}^{\cdot i} \qquad (20)$$

は，$\omega^i$が全微分として表わされない限りは，全ての成分を0とすることはできない。$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ および，$g_{\kappa\lambda}$ より計算されるレビ・チビタの平行性としての接続係数 $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$ を用いて $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$を表わせば次式のようになる[2]。

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} - S_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\kappa} + S^{\kappa}_{\cdot\mu\lambda} \qquad (21)$$

接続係数が(19)式で与えられる場合には，これより計算される曲率テンソル[2] $R_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ は0である。従って，座標系が $x^\kappa$ で与えられる，変形 $\gamma_i^{\cdot j}$ を受けた後の空間は，遠隔平行性空間となる。但し，$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$より計算される曲率テンソル $K_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$は，一般には，0とはならない。

## 5. 考 察

①分布転位理論における捩率は，材料内に分布している転位を表現する量として用いられるが，本文における捩率は，材料内部の細孔の分布などにより生ずる変位の不連続性のために，(10)式で定義される $\gamma_i^{\cdot j}$ が適合条件を満さないことから生ずる量であり，転位とは直接無関係な量であると考えられる。

②

$$\varphi_i^{\cdot j} = \partial_i \bar{u}^j - \gamma_i^{\cdot j} \qquad (22)$$

とおけば，$\varphi_i^{\cdot j}$ は材料の微視構造を考慮したことによる変形の自由度を表わしていると考えられるので，これを基に，微視構造理論[1]と結びつけることが可能と思われる。但し，マイクロポーラー体の理論では，$\varphi_{(ij)}=0$ であることから $K_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$ となり，このような制約を先験的に設けることは，本文の立場からは，理由がないが，ある種の近似理論とみなすことは可能と考えられる。

③

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_0}\oint_{\partial R_0} u_i u_j\, da - \rho_0\, \gamma_i^{\cdot k}\gamma_{jk} \qquad (23)$$

とおくと，これは $\gamma_i^{\cdot j}$ が(10)式で与えられた場合の，(8)式のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の差の共分散を表わすテンソル($\mathrm{tr}(\Sigma_{ij}) = I/V_0$)であり，材料の降伏などと密接な関係のある量と考えられる(分散→大のとき，マイクロクラックの密度→大)。


1) Kröner, E.: Mechanics of Generalized Continua, (IUTAM Symposium), Springer, 1967

2) Schouten, J.A.: Ricci-Calculus, Springer, 1954