I-4　変形する物体の力学，特に載荷された円柱体の振舞い。

正会員　工博　平井　敦

昭和46年，筆者はある假定をおいて変形する物体の力学について従来の弾性論とは異なる一つの考へ方を示した。(土木学会論文集190号，205号)しかし筆者の説明が下手であったため，これだけで諸先学の御同意を頂けたとは思えない。ベクトルの勾配場と環流場とに分けて考えると思考の混乱が避けられることに最近気付いたので，先づ基礎理論をこの観点から再整理し次にこれを載荷された円柱体に適用してみよう。

弾性論のすべての概念からは意識的に遠ざかるが，筆者の出発点を変位ベクトル$\mathbb{S}$に関する次式におく。

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\mathbb{S}} &= (C_1)^2 \,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{S} - (C_2)^2\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{S}\\ (C_1)^2 &= \frac{2c}{\mu}\left(\frac{c}{\varepsilon}+\gamma\right),\quad (C_2)^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

記号については論文集190，205号参照。以後原著と略称する。ベクトル$\mathbb{S}$は周知の如く，勾配場($\mathrm{rot}\,\mathbb{S}=0$)と環流場($\mathrm{div}\,\mathbb{S}=0$)とに分けられるが筆者は前者を力場(S-1の世界)，後者を渦場(S-2の世界)と呼称する。電磁場でいえば力場が電場に，渦場が磁場に対応するのであるが変位$\mathbb{S}$はこの両者を電磁場の如く色分けしておいてくれる親切気を持ってはいない。

筆者が昭和17年以来試みていることは力学を電気力学的に考えようということで，普通の物理学の思考とは逆である。

S-1の世界(指標1を使用)では原著に述べた如く，逆二乗の法則が支配する。この力場で所謂電気量に対応するものは質源の体積密度と称するもので，

$$m = (1/4\pi)\,\mathrm{div}\,\varepsilon R_1 \qquad (2)$$

また質源の面積密度の概念を導入して，重荷(Juka)と称したがこれは電荷に対応する。変形する物体内部に剛体($\varepsilon=\infty$)がある場合，その表面に重荷が現はれるが，

$$w = \frac{1}{4\pi}\varepsilon R = \frac{1}{4\pi}(R_1+R_2) \qquad (3)$$

電荷を持つ導体板の間にある電場の状態に対応するものとして筆者は，ある物体が大地の上におかれその上に質量Mなる物体を載荷したときの物体内部の力場R_1を考えて，

$$R_1 = -\mathrm{grad}\,\varphi \quad 及 \quad \mathrm{rot}\,R_1 = 0 \qquad (4)$$

φと$\mathrm{div}\,\mathbb{S}_1$とに関連して昭和20年頃導入した假説で，今$k=0$の場合を考えると，

$$\dot{\varphi} = -(c/\varepsilon+\gamma)\,\mathrm{div}\,\mathbb{S}_1 \qquad (5)$$

この假説より導かれる基本式は次の2式である。

$$\varepsilon(R_1+R_2) = C\,\mathrm{rot}\,W \qquad (6)$$

$$\mu\dot{W} = -C\,\mathrm{rot}\,R_2 \qquad (7)$$

但し，$W = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\mathbb{S}_2 \qquad (8)$

弾性学に於てはWを単なる剛体の回転と考えて考慮外においたことが，S-2の世界でのEnergyの流転の思想に觸れられない所以でもあり，又流体力学との連繫を失う原因でもあろうと筆者は考える。(6)(7)より，

$$R = R_1 + R_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi - (\mu/2c)\dot{\mathbb{S}}_2 \qquad (9)$$

以上の基本式より力場及び渦場の基本式群として；

$$\ddot{R}_1 = (C_1)^2\nabla^2 R_1 \qquad \mathrm{rot}\,R_1 = 0 \qquad (10)$$

$$\ddot{\varphi} = (C_1)^2\nabla^2\varphi \qquad (11)$$

$$\ddot{\mathbb{S}}_1 = (C_1)^2\nabla^2\mathbb{S}_1 \qquad \mathrm{rot}\,\mathbb{S}_1 = 0 \qquad (12)$$

$$\ddot{R}_2 = (C_2)^2\nabla^2 R_2 \qquad \mathrm{div}\,R_2 = 0 \qquad (13)$$

$$\ddot{W} = (C_2)^2\nabla^2 W \qquad \mathrm{div}\,W = 0 \qquad (14)$$

$$\ddot{\mathbb{S}}_2 = (C_2)^2\nabla^2\mathbb{S}_2 \qquad \mathrm{div}\,\mathbb{S}_2 = 0 \qquad (15)$$

図-2

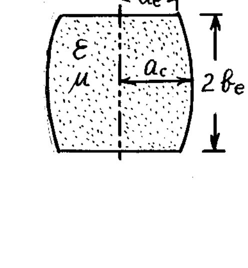

図-1

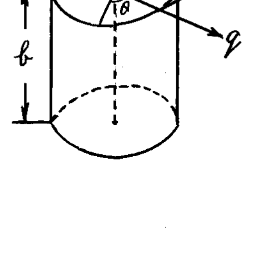

図-1のような半径a，長さ$2b$の円柱体を地上の剛体上に立て，その上面に全質量Mなる剛体を載荷した場合の現象を筆者の理論によって記述してみる。

S-1の世界の式をR_{1z}について示すと，

$$\frac{\partial^2 R_{1z}}{\partial t^2}=(C_1)^2\left[\frac{\partial^2 R_{1z}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R_{1z}}{\partial q^2}+\frac{1}{q}\frac{\partial R_{1z}}{\partial q}\right] \qquad (16)$$

この式を満足する解は

$$\left.\begin{aligned} &R_{1z}=A\cdot J_0(\alpha q)e^{-nt}\sinh mz \\ &\text{但し，}\quad m^2-\frac{n^2}{(C_1)^2}=\alpha^2,\quad \alpha q=\xi \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\widehat{R}_{1z}=R_{1e}-R_{1z} \qquad (18)$$

とおけば初期条件として

$$\left.\begin{aligned} &t\to 0 \ \text{で}\quad \widehat{R}_{1z}=R_{1e} \\ &t\to \infty \ \text{で}\quad \widehat{R}_{1z}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$J_0(\alpha a_e)=0$，すなわちξ_iを$J_0(\xi)=0$の任意の正根として

$$\widehat{R}_{1z}=\sum_{\xi_i}A_i\cdot J_0\left(\frac{\xi_i}{a_e}q\right)e^{-nt}\sinh mz \qquad (20)$$

同様に$J_1(\alpha a_c)=0$として

$$\widehat{R}_{1q}=\sum_{\xi_i}B_i\cdot J_1\left(\frac{\xi_i}{a_c}q\right)e^{-nt}\cosh mz \qquad (21)$$

この段階で$rot\,\widehat{R}_1=0$の条件を使用すると結局，

$$\widehat{R}_{1q}=-\sum_{\xi_i}\frac{1}{m}\frac{\xi_i}{a_e}A_iJ_1\left(\frac{\xi_i}{a_e}q\right)e^{-nt}\cosh mz, \qquad (22)$$

同じような取扱いにより

$$\widehat{\varphi}=-\sum_{\xi_i}\frac{A_i}{m}J_0\left(\frac{\xi_i}{a_e}q\right)e^{-nt}\cosh mz \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{S}_{1z}=-\sum_{\xi_i}\frac{2c}{\mu}\frac{A_i}{n}J_0\left(\frac{\xi_i}{a_e}q\right)e^{-nt}\sinh mz \\ &\widehat{S}_{1q}=\sum_{\xi_i}\frac{2c}{\mu}\frac{A_i}{mn}\frac{\xi_i}{a_e}J_1\left(\frac{\xi_i}{a_e}q\right)e^{-nt}\cosh mz \\ &\qquad \text{但し，}\quad \widehat{S}_{1z}=S_{1e}-S_{1z}\quad (\text{図-2}) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$\dot{\widehat{S}}_{1z}=(2c/\mu)\,\widehat{R}_{1z},\qquad \dot{\widehat{S}}_{1q}=(2c/\mu)\,\widehat{R}_{1q}, \qquad (25)$$

S-2の世界については，

$$m^2-\frac{n^2}{(C_2)^2}=\bar{\alpha}^2 \qquad (26)$$

$$\widehat{R}_{2z}=R_{2e}-R_{2z},\quad \widehat{S}_{2z}=S_{2e}-S_{2z}, \qquad (27)$$

として

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{R}_{2z}=\sum_{\xi_i}\bar{A}_iJ_0(\bar{\alpha}q)e^{-nt}\sinh mz \\ &\widehat{R}_{2q}=-\sum_{\xi_i}\frac{m}{\bar{\alpha}}\bar{A}_iJ_1(\bar{\alpha}q)e^{-nt}\cosh mz \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$W_\theta=-\sum_{\xi_i}\frac{\varepsilon n}{\bar{\alpha}c}\bar{A}_iJ_1(\bar{\alpha}q)e^{-nt}\sinh mz, \qquad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{S}_{2z}=\sum_{\xi_i}\frac{2c}{\mu}\frac{\bar{A}_i}{n}J_0(\bar{\alpha}q)e^{-nt}\sinh mz \\ &\widehat{S}_{2q}=-\sum_{\xi_i}\frac{2c}{\mu}\frac{m\bar{A}_i}{\bar{\alpha}n}J_1(\bar{\alpha}q)e^{-nt}\cosh mz \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

われわれが対象としている物体の寸法が常数C_1とC_2との差を問題とする程大きなものでなければ，$\alpha\fallingdotseq\bar{\alpha}$

境界条件を次の如く考える。

$$S_{1e}+S_{2e}=S_e,\qquad R_{1e}+R_{2e}=R_e \qquad (31)$$

S_eは引伸を正量とするが，これは実測値より得られる。円柱体上面側のS_eを$[S_e]$と記号する。R_eについても，$[R_e]$と記号すると原著より

$$[R_e]=-(4\pi/\varepsilon)w=-4M/\varepsilon a^2 \qquad (32)$$

(24),(30)より，$r=q/a_e$とおいて

$$[S_e]=\frac{2c}{\mu n}\sinh mb_e\sum_{\xi_i}(\bar{A}_i-A_i)J_0(\xi_i r), \qquad (33)$$

(33)の両辺に$r\cdot J_0(\xi_s r)dr$を乗じて0から1まで積分して，

$$\bar{A}_s-A_s=\frac{\mu n}{2c}\frac{2[S_e]}{\sinh mb_e\cdot\xi_s\cdot J_1(\xi_s)}$$

同様に(20),(28)より

$$\bar{A}_s+A_s=\frac{2[R_e]}{\sinh mb_e\cdot\xi_s\cdot J_1(\xi_s)}$$

これ等2式を連立にとけば

$$\left.\begin{aligned} &A_i=\frac{[R_e]-(\mu n/2c)\cdot[S_e]}{\xi_i\cdot J_1(\xi_i)\cdot\sinh mb_e} \\ &\bar{A}_i=\frac{[R_e]+(\mu n/2c)\cdot[S_e]}{\xi_i\cdot J_1(\xi_i)\cdot\sinh mb_e} \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

係数$A_i,\bar{A}_i$が求められたのでR,Sなどの状態は記述されたことになる。Boundary conditionの取扱いに問題があるかも知れないが，少くともこの小論で基本的に筆者が何を意図しているかを御理解頂ければ幸である。筆者の理論では力という概念が表に現はれていないが，$\varepsilon\dot{R}$という量は単位体積当りの運動量である。

$k=0$ということで論を進めてきたが，この問題は別な機会にゆづりたい。交番する載荷については，講演会当日時間があれば触れる積りである。

屢々申し上げた如く，筆者は間違った思考をしているのかも知れない。しかしこのように考えることが出来るという点については，充分に考えてみて頂きたい。

この小論を一つの叩き台として，新しい学問の芽が育つ転機となるのならば，筆者にとっては望外の喜びである。

50. 6. 8.