

北海道大学 正員 渡辺 昇  
 北海道大学 正員 金子 孝吉  
 北海道大学 学生員 ○中村 信之

1. アフィン荷重について.

桁の微分方程式は, 桁の分布荷重を  $R(x)$ , 桁のたわみを  $y(x)$  とするとき,  $EIy''(x) = R(x)$  で表わすことができる. 今,  $R(x)$  を, 境界条件を満足する桁のたわみ曲線に相似な分布荷重(アフィン荷重)に展開することを考える.

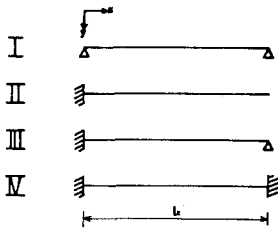
$$EIy''(x) = R(x) = R^*y(x)$$

ここで  $m = R^*/EI$  とおけば

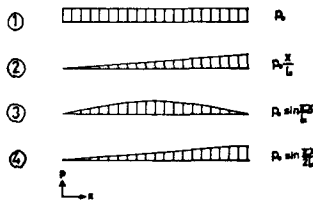
$$y''(x) = m^*y(x)$$

でその解は  $y(x) = A \cos mx + B \sin mx + C \cosh mx + D \sinh mx$  となる.

境界条件により係数  $A, B, C, D$  を求めると, 一本の固有方程式が得られ, その固有値は桁の両端の条件のみにより決定される.  $y(x)$  は固有値を持ち, 直交関数系を形成するので  $A, B, C, D$  は求まる. 境界条件により桁は次の I~IV に分類される. 荷重状態についてはの~⑥に対して計算を行った.



—境界条件— 図-1



—荷重状態—

図-2

IV-⑥ の場合の例

$$\text{荷重 } R(x) = \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos \lambda_n c - \cosh \lambda_n c}{Lx} - \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \frac{(\sin \lambda_n c - \sinh \lambda_n c)}{Lx} \right\} \left\{ \frac{\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x}{Lx} - \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \frac{(\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x)}{Lx} \right\} \dots (1)$$

$$\text{たわみ } y(x) = \frac{R^* P}{EI \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2} \left\{ \frac{\cos \lambda_n c - \cosh \lambda_n c}{Lx} - \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \frac{(\sin \lambda_n c - \sinh \lambda_n c)}{Lx} \right\} \left\{ \frac{\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x}{Lx} - \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n} \frac{(\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x)}{Lx} \right\} \dots (2)$$

( $\lambda_n$ : それぞれの場合 (I~IV) の  $n$  番目の固有値)

2. 応用例(1): 両端固定桁の解析.

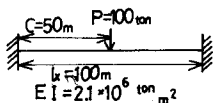


図-3

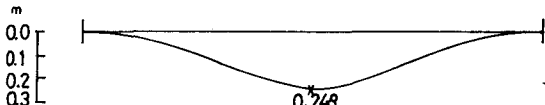


図-4

3. 応用例(2): 剛性マトリックスとの組み合わせによるねじり剛性を無視した場合の直交異方性板の解析(ただし  $\mu_x = \mu_y = 0$ ).

$$\text{微分方程式は } B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = R(x, y)$$

剛性マトリックスでは  $l_y$  の区間に荷重が無いので次式となる。

$$B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots (3)$$

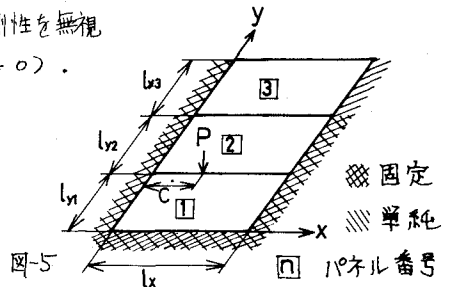


図-5

いま  $x = \text{一定}$  の相対する二辺が固定の場合  $w(x, y)$  を次式のように仮定して変数分離法で解く。

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \cdot V_n(y) \quad \dots (4)$$

ここで  $U_n(x)$  は (2) 式中の

$$U_n(x) = \left( \cos \frac{\lambda_n}{L_x} x - \cosh \frac{\lambda_n}{L_x} x \right) - \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n} \left( \sin \frac{\lambda_n}{L_x} x - \sinh \frac{\lambda_n}{L_x} x \right) \quad \dots (5)$$

である。(5) 式を (3) 式に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_x \left( \frac{\lambda_n}{L_x} \right)^4 V_n + B_y \frac{d^4 V_n}{dy^4} \right\} \cdot U_n(x) = 0 \quad \dots (6)$$

これを解いて

$$V_n(y) = C_1 \sin \alpha y \cdot \sin \alpha y + C_2 \sin \alpha y \cdot \cos \alpha y + C_3 \cos \alpha y \cdot \sin \alpha y + C_4 \cos \alpha y \cdot \cos \alpha y \quad \dots (7)$$

係数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は

$$\left( \text{ただし } \alpha = \frac{\lambda_n}{L_x} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_x}{B_y}}} \right)$$

$$\theta = \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad M = M_y = -B_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad R = R_y = -B_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \quad \dots (8)$$

より  $\theta_0, w_0, M_0, R_0, \theta_l, w_l, M_l, R_l$  の値を使用して決定される。これから次の関係が得られる。

$$\begin{pmatrix} w_l \\ \theta_l \\ R_l \\ M_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ R_0 \\ M_0 \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

(9) 式から剛性マトリックスを誘導すると次式 (10) となる。

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ M_0 \\ R_l \\ M_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S[4B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \cos \alpha y + \sin \alpha y \cosh \alpha y)] & S[2B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \cosh \alpha y + \sin \alpha y \csc \alpha y)] & -S[4B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y + \csc \alpha y \sin \alpha y)] & -S[4B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \sin \alpha y)] \\ & S[2B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y - \sin \alpha y \csc \alpha y)] & -S[4B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \sin \alpha y)] & -S[2B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y - \csc \alpha y \sin \alpha y)] \\ & & S[4B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y + \sin \alpha y \csc \alpha y)] & -S[2B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y + \sin \alpha y \csc \alpha y)] \\ & & & S[2B_y \alpha^2 (\sin \alpha y \csc \alpha y - \sin \alpha y \csc \alpha y)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ w_l \\ \theta_l \end{pmatrix} \quad \dots (10)$$

Symmetric ( $S = \frac{1}{\sin \alpha y \csc \alpha y - \csc \alpha y \sin \alpha y}$ )

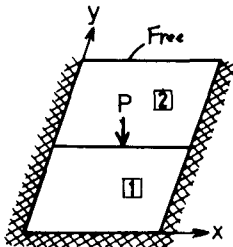
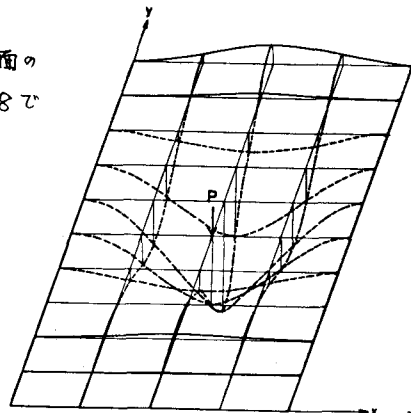


図-7のたわみ曲面の数値計算例は図-8である。



- $EI_x = 2.503 \times 10^4 \text{ ton}\cdot\text{m}^2$
- $EI_y = 2.115 \times 10^3 \text{ ton}\cdot\text{m}^2$
- $P = 1 \text{ ton}$
- $C = 4 \text{ m}$
- $L_x = 8 \text{ m}$
- $L_{y1} = L_{y2} = 5 \text{ m}$

図-7

図-8