I-2　　3次元弾性問題の積分方程式による解析

京都大学 工学部　正 丹羽義次，正 小林昭一，正 ○福井卓雄

近年，三次元弾性境界値問題を有効に扱い得る数値解析法として，積分方程式法（もしくは積分法）が注目されつつある。　それは，従来普通に行なわれてきた数値微分を主体とする数値解析法（FDM，FEMなど），即ち，考えている領域の内部を細分し，境界の効果を内部へ伝播させていく解析法では，計算機が処理し得る容量の限界によって，その扱い得る領域，精度などに大きな制約を受けざるを得ず，三次元問題では特にその制約が大きいのに対し，積分法では，未知量を境界上のデータだけから決定するため，この容量上の制約をかなりの程度まで軽減できるからである。

三次元境界値問題の積分方程式による数値解析は，ポテンシャルの問題では，Hess [1]，日野他 [2]，弾性問題では Cruse [3, 4]，Deak [5]，丹羽他 [6]，岡村他 [7][8] が実際に計算を行っている。このうち，日野，岡村の方法は素解としてすでに境界条件の一部を満足したものを採用して，境界条件の任意性の一部を犠牲にするかわりに，解くべき未知数の減少および計算精度の向上を狙っている特徴がある。また，Hess は航空機のまわりのポテンシャル流を外部 Neumann 問題として扱っており，豊富な計算例を示している。

一般に，積分方程式法における数値解析の困難さは素解の特異性に起因している。　特に弾性問題においては，ポテンシャルの問題に比して未知数の数が多いこと，素解および境界条件が複雑なことによって，この困難さはより大きいものとなっている。　工学上の問題において特に要求される境界付近の応力，変位の解析精度を十分なものにするためには，何らかの形で素解の特異性を回避してやることが必要である。　本報では補間関数を用いて，与えられた積分方程式を数値化して解くことを試みる。　適当な補間関数を用いることにより，数値積分の近似度を向上させると同時に，素解の特異性を減少させることが目的である。　まず，境界値問題から積分方程式への定式化について簡単に述べ，次に補間関数を導入して近似積分方程式を導く。最後に補間関数の例を挙げる。

境界値問題，素解，積分方程式

記号を次の様に定義しておく。$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$ はベクトル，$\boldsymbol{\Gamma}$，$\boldsymbol{I}$ はテンソル，$\mathbb{L}^x$，N^x は微分作用素，∇ はグラディエント作用素，μ はせん断弾性定数，ν はポアソン比を表わす。　等方均質な弾性体を考える。領域 $D+\partial D$ において境界値問題は，

(1)
$$\mathbb{L}^x \boldsymbol{u}(x) \equiv \mu \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla(\nabla\cdot \;-\; \nabla\times(\nabla\times \right] \boldsymbol{u}(x) = 0 \qquad x \in D.$$
$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{f}(x) \qquad x \in \partial D_1$$
$$\boldsymbol{t}(x) = N^x \boldsymbol{u}(x) \equiv \mu \left[2\boldsymbol{n}\cdot\nabla + \frac{2\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{n}(\nabla\cdot \;+\; \boldsymbol{n}\times(\nabla\times \right] \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{g}(x) \qquad x \in \partial D_2.$$

素解（Kelvin解）は次の様に与えられる。

$$\mathbb{L}^x \boldsymbol{\Gamma}(x;\xi) = -\delta(x-\xi)\boldsymbol{I}$$

(2)
$$\boldsymbol{\Gamma}(x;\xi) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{1}{r}\right)\left\{ \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}\boldsymbol{I} + \frac{1}{4(1-\nu)}\nabla r \otimes \nabla r \right\}$$

ここに，$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$，$\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{r}$，$\boldsymbol{I}$ は恒等テンサーであり，$\boldsymbol{\Gamma}(x;\xi) = \boldsymbol{\Gamma}(\xi;x) = \boldsymbol{\Gamma}^T(x;\xi)$。

このとき Somigliana の公式は次の様に書ける。

(3)
$$\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{u}(x) + \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\cdot\boldsymbol{u}(\xi)\,dS_\xi = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma}(x;\xi)\cdot\boldsymbol{t}(\xi)\,dS_\xi$$

ここに、$\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi) \equiv (N^{\xi}\boldsymbol{\Gamma}(\xi;x))^T$ であり、$\boldsymbol{E}(x)$ は $x \in D$ のとき $\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{I}$、$x \notin D+\partial D$ のとき $\boldsymbol{E}(x)=0$。さらに、点 x が境界上にあるときは、一般に $\boldsymbol{E}(x)$ は、点 x の見込む立体角に関係して値が定まる。特に境界がなめらかなときには、$\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{2}\boldsymbol{I}$ となる。(3)式は境界上の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t}$ についての式であり、境界上で $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ が与えられているときには、$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$ に関する特異積分方程式となる。

数値解析法

境界をM個の境界要素に分ける。$\partial D=\partial D_1+\partial D_2+\cdots+\partial D_M$。境界要素 ∂D_m において、K個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_K$ を取り、次の様に関数 $\phi_\alpha^{(m)}$ $(\alpha=1,\ldots,K)$ を定義する。

$$\phi_\alpha^{(m)}(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha=1}^{K}\phi_\alpha^{(m)}(x)=1 \quad x\in\partial D_m, \qquad \phi_\alpha^{(m)}(x)=0 \quad x\notin\partial D_m.$$

補間関数 $\phi_\alpha^{(m)}$ を用いて、境界要素 ∂D_m における変位 $\boldsymbol{u}^{(m)}(x)$ および境界全体の変位 $\boldsymbol{u}(x)$ は K個の点における値 $\boldsymbol{u}_\alpha^{(m)}=\boldsymbol{u}(x_\alpha)$ によって $\boldsymbol{u}^{(m)}(x)=\sum_{\alpha=1}^{K}u_\alpha^{(m)}\phi_\alpha^{(m)}(x)$, $\boldsymbol{u}(x)=\sum_{m=1}^{M}\boldsymbol{u}^{(m)}(x)$ の様に表わされる。これらを(3)式の右辺の積分に代入すれば、

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\cdot\boldsymbol{u}(\xi)\,dS_\xi \simeq \sum_{m=1}^{M}\left\{\sum_{\alpha=1}^{K}\left[\int_{\partial D_m}\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\,\phi_\alpha^{(m)}(\xi)\,dS_\xi\right]\cdot\boldsymbol{u}_\alpha^{(m)}\right\}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{\alpha=1}^{K}\boldsymbol{A}_\alpha^{(m)}(x)\,\boldsymbol{u}_\alpha^{(m)}$$

境界上の応力 $\boldsymbol{t}(x)$ についても同様に補間関数表示ができる。さらに、全節点について番号づけ $(n=1,\ldots,N)$ を行ない、組 (m,α) との対応をつければ、(3)式の補間近似として次の様に書くことができる。

$$(4) \qquad \boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{u}(x)+\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{A}_n(x)\,\boldsymbol{u}_n=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{B}_n(x)\cdot\boldsymbol{t}_n$$

特に、点 x を境界上の節点 x_n $(n=1,\ldots,N)$ に一致するように取れば、次の代数方程式が得られる。

$$(5) \qquad \boldsymbol{E}(x_m)\cdot\boldsymbol{u}(x_m)+\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{A}_n(x_m)\cdot\boldsymbol{u}_n=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{B}_n(x_m)\cdot\boldsymbol{t}_n$$

(4)式は、境界上の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t}$ を決定するために、(5)式は領域内部の値を算出するために用いることができる。

例として、ここでは境界では三角形要素に分けて、境界の曲率をも考慮した補間を考える。まず、境界の形状の近似について考えよう。境界上の三点 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ を考え、これらを頂点とする平面三角形 Δ の重心を $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ とし、さらに重心 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ から平面三角形 Δ にたてた垂線と境界との交点を $\boldsymbol{x}_0$ とする。三角形 Δ を含む平面内に (ξ^1,ξ^2) 軸、境界に対して外向きに ξ^3 軸を取るように、局所直交座標系を決める。この座標系での $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_0$ の座標を $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_0$ で表わす。三角形 Δ を十分小さく選べば、境界面は次の様に近似することができる。

$$\xi^3=S^{\alpha\beta}(\xi^\alpha-\xi_0^\alpha)(\xi^\beta-\xi_0^\beta)+S^\alpha(\xi^\alpha-\xi_0^\alpha)+H, \qquad (\alpha,\beta=1,2).$$

これらの係数は、座標 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_0$ および $\boldsymbol{\xi}_0$ における境界の単位法線ベクトルが与えられれば、容易に計算できる。従って、この要素における面積素片は次の様になる。$dS_\xi=\sigma(\xi)\,d\xi^1d\xi^2=\sqrt{1+\{2S^{\alpha\gamma}(\xi^\alpha-\xi_0^\alpha)+S^\gamma\}\{2S^{\beta\gamma}(\xi^\beta-\xi_0^\beta)+S^\gamma\}}\,d\xi^1d\xi^2$.

次に密度分布の補間関数 $\phi_\alpha^{(m)}(x)$ の例とそれによる積分 $\boldsymbol{A}_\alpha^{(m)}(x)$, $\boldsymbol{B}_\alpha^{(m)}(x)$ について考えよう。次の例では、$\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ は特に ξ^1 軸上に取る。

① 線形補間、 $\phi_1^{(m)}(\xi)=\dfrac{\xi^2}{\xi^2_1}$, $\boldsymbol{A}_1^{(m)}(x)=\int_{\partial D_m}\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\phi_1^{(m)}(\xi)\,dS_\xi=\int_0^{\xi^2_1}\dfrac{\xi^2}{\xi^2_1}d\xi^2\int_{a_2}^{a_3}\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi^1$.

ただし、$a_i=\left(\dfrac{\xi^1_1-\xi^1_i}{\xi^2_1}\right)\xi^2+\xi^1_i \quad (i=2,3)$.

② 二次補間、 $\phi_1^{(m)}(\xi)=\dfrac{2}{(\xi^2_1)^2}\xi^2\left(\xi^2-\dfrac{\xi^2_1}{2}\right)$, $\phi_4^{(m)}(\xi)=\dfrac{\xi^2_1-\xi^2}{\xi^2_1}\{\alpha(\xi^1)^2+\beta\xi^1+\gamma\}$ ただし、α, β, γ は $\begin{cases}\alpha(a_i)^2+\beta(a_i)+\gamma=0\\ \alpha\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)+\gamma=1\end{cases}$ を満足する。 $\boldsymbol{A}_1^{(m)}(x)=\int_0^{\xi^2_1}\dfrac{2}{(\xi^2_1)^2}\xi^2\left(\xi^2-\dfrac{\xi^2_1}{2}\right)d\xi^2\int_{a_2}^{a_3}\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi^1$, $\boldsymbol{A}_4^{(m)}(x)=\int_0^{\xi^2_1}\dfrac{\xi^2_1-\xi^2}{\xi^2_1}d\xi^2\int_{a_2}^{a_3}[\alpha(\xi^1)^2+\beta\xi^1+\gamma]\,\boldsymbol{\Gamma}_I(x;\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi^1$.

係数 $\boldsymbol{B}_\alpha^{(m)}(x)$ についても同様である。特に境界が平面であるときには、これらの積分はすべて

$$I[m,n,p]\equiv\int\frac{x^p}{(x^2+\alpha^2)^m(\sqrt{ax^2+bx+c})^n}\,dx$$

の形をしており、初等関数で表わすことができる。一般に境界の曲率が小さいときには、それに関する項については、適当な近似展開ができて同様に積分を実行することができる。尚、数値解析例については当日発表する。

（参考文献） 土木学会論文集 [2] 237, [7] 199, [8] 233; 関西支部講演会 [6] S48, S50; [1] Computer Meth. Appl. Mech. Engng 5, pp. 145-196.
[3] Int. J. Solids Structs 5, pp. 1259-1274, [4] Comput. Struct. 4 pp. 741-754, [5] AFSC Rept. No. AFRPL-TR-71-140-Vol. 1.