I-1　初期値・境界値問題の積分方程式解法とその応用

京都大学工学部　小林 昭一

1. はじめに

物理数学の境界値問題を積分方程式によって解く方法は，今世紀の初頭に研究され始めていたが，解析解を得ることが困難なために，最近まで殆んど注目をされなかった。　しかし，大容量の計算機が出現するに及んで，この解法が見直されるようになった。

本報は，まず，物理数学に最も普通に現われる2階の線形連立偏微分方程式の初期値・境界値問題を，積分方程式に変換する一般的な手法について述べ，ついで，我々の研究室で解析を試みた具体例を中心に検討を加えたものである。

2. 積分方程式への定式化

いま，領域 $V+\partial V$ で，ベクトル $u(x,t)$ （x；(x^1,x^2,x^3)，t；時間）に関する2階の線形微分方程式が次のように与えられているものとする。

$$(C^{kl}_{ij}\,u^{i|j})|_k + D\delta^l_i u^i + f^l = a\ddot{u}^l + b\dot{u}^l \qquad (1)$$

ここに，C^{kl}_{ij} は4階のテンソル，f^l はベクトル，D, a, b はスカラー定数，δ^l_i は Kronecker の delta，$u^i|_k$ などは，u^i の x^k による共変微分，$\dot{u}^i$ などは $\partial u^i/\partial t$ などを意味するものとする。

いま，初期条件を，$\dot{u}^i|_{t=0}=\dot{u}^i_0$，$u^i|_{t=0}=u^i_0$ として，式(1)の Laplace 変換を取ると次式を得る。

$$(\bar{C}^{kl}_{ij}\,\bar{u}^{i|j})|_k + \{D-(a\nu^2+b\nu)\}\delta^l_i\bar{u}^i = \bar{f}^l + a\dot{u}^l_0 + (a\nu+b)u^l_0 \quad ; \mathcal{L}^l_i\bar{u}^i = \bar{X}^l \qquad (2)$$

ここに，ν は Laplace 変換のパラメーターとし，変換された量にはバーをつけて示した。

ここで，$V+\partial V$ で，2つの異なった系（上添字(1)，(2)をつけて区別する）を考えると，次の関係が求まる。

$$\int_V \bar{u}^{(2)}_l\left[(\bar{C}^{kl}_{ij}\bar{u}^{(1)i|j})|_k + \{D-(a\nu^2+b\nu)\}\delta^l_i\bar{u}^{(1)i}\right]dV - \int_V \bar{u}^{(1)l}\left[(\bar{C}^{ki}_{lj}\bar{u}^{(2)|j}_i)|_k + \{D-(a\nu^2+b\nu)\}\delta^i_l\bar{u}^{(2)}_i\right]dV$$

$$= \int_{\partial V}\left[\bar{u}^{(2)}_l\bar{C}^{kl}_{ij}\bar{u}^{(1)i|j} - \bar{u}^{(1)l}\bar{C}^{ki}_{lj}\bar{u}^{(2)|j}_i\right]n_k\,dS - \int_V\left[\bar{u}^{(2)}_l|_k\bar{C}^{kl}_{ij}\bar{u}^{(1)i|j} - \bar{u}^{(1)l}|_k\bar{C}^{ki}_{lj}\bar{u}^{(2)|j}_i\right]dV \qquad (3)$$

次に，式(2)に対応した次式を考える。

$$\mathcal{L}^l_i\,\Gamma^i_\alpha(p,q;\nu) = -\delta^l_\alpha\,\delta(p-q) \qquad (4)$$

ここに，p, q はそれぞれ観測点，源点を，また，$\delta(p-q)$ は delta function を表わすものとする。$\Gamma^i_\alpha(p,q;\nu)$ は，物理的には，点 q に x^α 方向に作用する単位の撹乱によって，点 p に生じる x^i 方向の応答を意味しており，式(2)の基本特異解と呼ばれる。

式(3)に於て，$\bar{u}^{(1)l}$，$\bar{u}^{(2)}_l$ の代りに，それぞれ $\bar{u}^l(p;\nu)$，$\bar{\Gamma}_{l\alpha}(p,q;\nu)$ を代入し，$\bar{\Gamma}_{\alpha l}(q,p;\nu)=\bar{\Gamma}_{l\alpha}(p,q;\nu)$ を考慮すると，次の積分方程式を得る。

$$\bar{u}_\alpha(p;\nu)F(p) = \int_V \bar{\Gamma}_{\alpha l}(q,p;\nu)\bar{X}^l(q;\nu)\,dV + \int_V \bar{C}^{kl}_{ij}\left[\bar{\Gamma}_{\alpha l}(q,p;\nu)|_k\,\bar{u}^i(q;\nu)|^j - \bar{u}^i(q;\nu)|_k\,\bar{\Gamma}_{\alpha l}(q,p;\nu)|^j\right]dV$$

$$+\int_{\partial V}\bar{C}^{kl}_{ij}\left[\bar{u}^i(R;\nu)\bar{\Gamma}_{\alpha l}(R,p;\nu)|^j - \bar{\Gamma}_{\alpha l}(R,p;\nu)\bar{u}^i(R;\nu)|^j\right]dS \qquad (5)$$

ここに，Rは∂V上の点であり，また $F(p)$ は，$p\in V$，$p\in\partial V$ に対して，それぞれ 1，1/2であり，その他の場合は 0である。

式(2)が自己随伴形であれば，式(5)の右辺の第2項は0となり，さらに，式(2)が同時形の場合には，式(5)の第1項も0となる。

式(5)における基本特異解は，式(4)より R_∞ で，あるいは適当な境界条件を満すようにして容易に求められるので，式(5)の積分方程式は∂V上の条件を考慮して解くことができる。実際には，数値的に解かざるを得ないが，境界の形状は全く任意であってもよい。式(5)を解いて得た解 $\bar{u}(p;s)$ は，Laplace逆変換により，$u(p;t)$ となる。これは，式(1)の求める解である。

3. 解析例

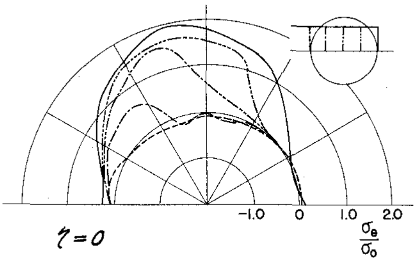

図-1 円孔周辺の応力分布

a) 単位階段波の通過に伴って生ずる円形埋設物周囲の過渡応力状態（平面ひずみ問題）；埋設物の弾性係数をE_2，周囲の弾性体の弾性係数をE_1，$\gamma=E_2/E_1$とし，ポアソン比は両者同じとする。階段波の通過位置に対応して埋設物境界上に生ずる接線方向応力σ_θの状態を図-1〜3に示す。解法の詳細は当日述べる。なお；

b) 弾性問題；2次元静弾性問題（これは，上述の特別の場合として求められる），2次元異方性問題，3次元問題，

c) 薄板の曲げ問題，

d) 厚板の問題，

e) 熱伝導の問題，

などの解析例についても当日言及する。

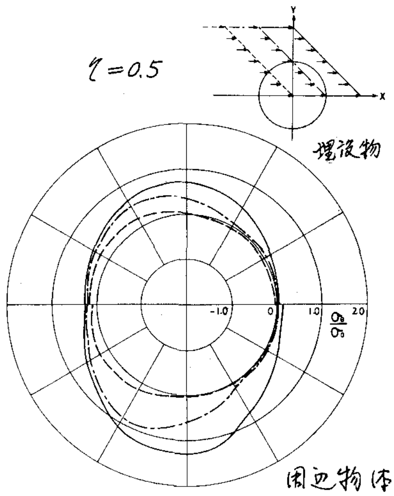

図-2 埋設物境界での応力分布

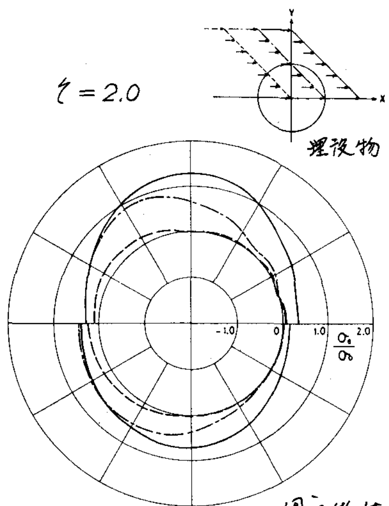

図-3 埋設物境界での応力分布

図-4 トンネル周辺の応力状態