

大阪市立大学工学部 正員 岡村 治子

" " 西村 昂

1. はじめに

交通ネットワークの解析において、カットセットは、しばしば有効に利用することが出来る。グラフのカットの存在については、これよりインシデンス行列によるものを検討した(参考文献¹⁾)、ここでは組合せ論的な方法について考察してみた。グラフは、点の set V と V の二点を結ぶ辺の set E からなり、 $G=(V, E)$ であらわす。連結グラフ (V, E) において、グラフの辺の集合 X で、 (V, E) から X を除くと $(V, E-X)$ が非連結になり、 $(V, E-X)$ に X の任意の辺を加えると $(V, (E-X) \cup e)$, $\forall e \in X$ が連結になるとき、 X をカットとよぶ。本稿では、ある種の交通ネットワークに有効である、グラフの単純化によるカットの求め方について考えてみたい。

2. グラフの単純化とカットの関係

(V, E) を連結グラフとする。 (V, E) のカット全体からなる集合を $C(V, E)$ であらわす。 V の任意の点 v に対して、 v と隣接する点(すなわち、 E の辺で v と結ばれている点)の個数を v の次数という。

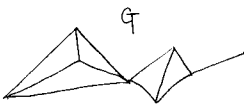


図-1

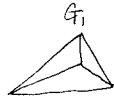


図-2

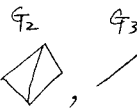


図-1 のようなグラフ G を、図-2 のように G_1, G_2, G_3 にわけられは、

$$C(G) = C(G_1) \cup C(G_2) \cup C(G_3)$$

となるので、カットを数えるときは、 (V, E)

が「多边形グラフ」として考えれば充分である。よって次数1の点を含まないとよい。

Case 1 V の v が次数2のとき

v と接合する辺を e_1, e_2 とする。このグラフのカットは次の三種類からなる。

- (1) $\{e_1, e_2\}$ (2) e_1 と e_2 のどちらか一つを含むカット (3) e_1 も e_2 も含まないカット

(V, E) から v, e_1, e_2 を除き v と v を結ぶ辺を加えて (e_1, e_2) であらわしたグラフを (V^*, E^*) とする(図-3)。

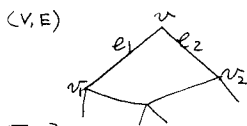


図-3

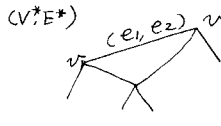
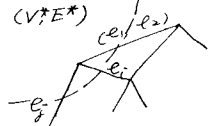


図-4



もし (V, E) に v と v を結ぶ辺 e があれば、 (V^*, E^*) は e と (e_1, e_2) の多重辺をもつことになる。

(V, E) における (3) のカットは (V^*, E^*) における (e_1, e_2) を含まないカットと同じである。 (V^*, E^*) において、 (e_1, e_2) を含むカットを $\{(e_1, e_2), e_i, e_j\}$ とし i, j とし、これを $\{e_1, e_i, e_j\} \cup \{e_2, e_i, e_j\}$ とおきかえれば(図-4)、 $C(V, E) = C(V^*, E^*) \cup \{e_1, e_2\}$ となる。

Case 2 V の v が次数3のとき

v と接合する辺を e_1, e_2, e_3 とする。 (V, E) から v, e_1, e_2, e_3 を除き、 v を含んでいない多边形を A と

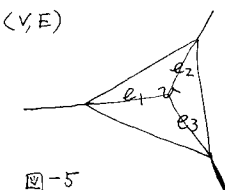
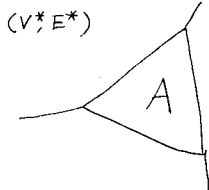


図-5



おいたグラフを (V^*, E^*) とおく(図-5)。 (V, E) のカットは次の4種類からなる。(1) $\{e_1, e_2, e_3\}$ (2) A を1回通るカット(このとき、 $e_1, e_2, e_3, \{e_1, e_2\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_3\}$ のどれか一つを含む) (3) A を2回以上通るカット (4) A を通らないカット

又 (V, E^*) のカットは次の二種類からなる。(1)* A を1回通るカット (2)* A を通らないカット
 (V, E) の(3)のカットは (V, E^*) の(2)*のカットと同じである。又 (V, E^*) の(1)*のカットは (V, E) の(2)のカットに書きなおすことが出来る。たとえば $\{A, e_4, e_5, e_i, e_j\}$ を(1)*のカットと見て (V, E) では $\{e_1, e_4, e_5, e_i, e_j\}$ と $\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_i, e_j\}$ になる(図-6)

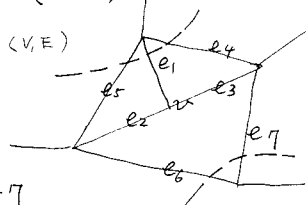
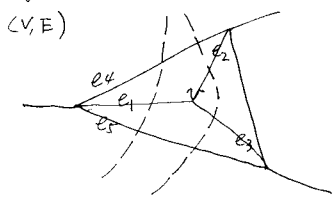
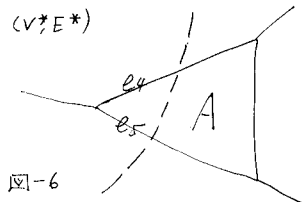


図-6

図-7

同様に他の(1)*のカットも (V, E) の(2)のカットにかきなおすことが出来る。(3)のカットを $CC(V, E)_A$ とあらわすと、 $CC(V, E) = CC(V, E^*) \cup \{e_1, e_2, e_3\} \cup CC(V, E)_A$ となる。

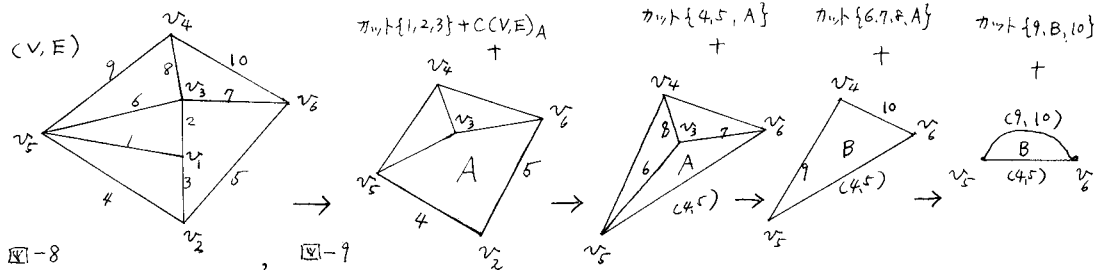
A が三角形のときは、 $CC(V, E)_A = \emptyset$, A が四角形のときは(図-7)、 $CC(V, E)_A = \{e_1, e_4, e_5, e_i, e_j\}$ を含むカットとなる。

3. カットの求め方

Case 1とCase 2により次数2又は次数3の点をつぎつぎと除き、グラフをできるだけ単純化する。これにより、 (V, E) で求めるよりも簡単にカットが求められる。

4. 例

(V, E) , $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{1, 2, \dots, 10\}$, 図-8のグラフを考える。 v_1, v_2, v_3, v_4 の順序で点を除く(図-9)



(V, E) のカットは次の23ヶとなる(棒線をひいたもの)。

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3\}, C(V, E)_A = \{\{4, 1, 6, 7, 5\} \text{ を含むカット} \} = \{4, 1, 6, 7, 5\}, \{4, 5, A\} = \{4, 5, 3\} \cup \{4, 5, 1, 2\} \\ & \{6, 7, 8, A\} = \{6, 7, 8, 2\} \cup \{6, 7, 8, 1, 3\}, \{9, 10, B\} = \{9, 10, 8\} \\ & \{9, 10, B, (4, 5)\} = \{9, 10, 6, 7, A\} = \{9, 10, 6, 7, 2\} \cup \{9, 10, 6, 7, 1, 3\} \\ & \{9, B, (4, 5)\} = \begin{cases} \{9, (4, 5), 6, A\} = \{9, 4, 6, A\} \cup \{9, 5, 6, A\} = \{9, 4, 6, 1\} \cup \{9, 4, 6, 2, 3\} \cup \{9, 5, 6, 1, 3\} \\ \{9, (4, 5), 7, A\} = \{9, 4, 7, A\} \cup \{9, 5, 7, A\} = \{9, 4, 7, 2, 3\} \cup \{9, 4, 7, 1, 2\} \cup \{9, 5, 7, 8\} \end{cases} \\ & \{10, B, (4, 5)\} = \begin{cases} \{10, (4, 5), 7, A\} = \{10, 4, 7, A\} \cup \{10, 5, 7, A\} = \{10, 4, 7, 1, 2\} \cup \{10, 4, 7, 3\} \cup \{10, 5, 7\} \\ \{10, (4, 5), 6, 8, A\} = \{10, 4, 6, 8, A\} \cup \{10, 5, 6, 8, A\} = \{10, 4, 6, 8, 1\} \cup \{10, 4, 6, 8, 2, 3\} \\ \cup \{10, 5, 6, 8, 2\} \cup \{10, 5, 6, 8, 1, 3\} \end{cases} \end{aligned}$$

5. あとがき

次数4以上の点も上の方法の拡張により除けるが、 $CC(V, E)_A$ が複雑になる。よって次数4以上の点が多くてこの方法では単純化できないグラフについては、今後の考察が必要である。

参考文献

1) 西村・岡村「ネットワークにおけるカットに関する考察」土木学会関西支部年次学術講演会概要 昭和49年