IV-69　マルコフ再生理論による都市交通モデルについて

岐阜大学工学部　正員　加藤晃
岐阜大学大学院　学生員　○宮城俊彦

1．はじめに

閉じたシステムにおいてマルコフ連鎖によるOD交通量の推定が現実のODパターンをよく反映していることはすでに実証されている[1]。マルコフ連鎖モデルの基本仮定においては，あるゾーンを出発する人は，すべて同時に出発し，同時に目的地ゾーンに到着することが要請され，しかも，その推移確率は時点によらず一定であり，ゾーンにおける滞在時間や走行時間に影響を受けないことが前提である。しかし，現実の推移行動を考えるとトリップメイカーの行動を起こす時点はランダムであるし，それまでに費やした時間も推移確率に影響を及ぼすであろう。このような観点からトリップ行動を考えると，それはマルコフ再生過程として表現できる．すなわち，生起する状態の系列を$X_1, X_2, \cdots X_n$，また，その状態に入る時点を$T_1, T_2, \cdots T_n$とするとき，この二次元確率過程$\{X_n, T_n\}$をマルコフ再生過程（M.R.P）といい，トリップ生起間の時間$T_n - T_{n-1}$がマルコフ連鎖のように一定ではなく，ランダム変数である。このようなM.R.Pに従う都市交通動態の定式化を検討してみた。

2．モデルの定式化

モデルの定式化に先だち，次のような仮定と諸量を定義しておく。ゾーン間通行時間は出発ゾーンの滞在時間に含まれるものとする。ここでは，これをゾーン間推移時間とよび，ゾーン内の施設に到着した人が，次の目的ゾーンの施設に到着するまでの所要時間を意味する。推移時間の確率分布は次式で定義される。

$$Q_{ij}(t) = P_{ij} F_{ij}(t) \quad \cdots (1)$$

ここに，P_{ij}；マルコフ連鎖の推移確率，$\sum_j P_{ij} = 1$

$$F_{ij}(t) = P\{ T_n - T_{n-1} \leqq t \mid X_{n-1} = i,\ X_n = j \}$$

ただし，$F_{ij}(0) = 0$，$t \leqq 0$；$0 \leqq F_{ij}(t) \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq \infty$；$\lim_{t \to \infty} F_{ij}(t) = 1$　。したがって，$Q_{ij}(0) = 0$，$\sum_j Q_{ij}(\infty) = 1$.
このような mass function を要素とする行列を$\mathbf{Q}(t) = [Q_{ij}(t)]$で表わす。また，$H_i(t) = \sum_j Q_{ij}(t)$ $\cdots (2)$ は，iゾーンにいるトリップメイカーが$[0, t]$内に，他のゾーンへ移るのに要する時間の分布関数。行列形式で表わせば$\mathbf{H}(t) = [\delta_{ij} H_i(t)]$。ところで，マルコフ再生過程の推移確率は，次のように表わされる。

$$P\{X_n = j,\ T_n \leqq t \mid X_0, X_1, \cdots, X_{n-1};\ T_0, T_1, \cdots T_{n-1}\} = P\{X_n = j,\ T_n \leqq t \mid X_{n-1}, T_{n-1}\} = Q_{X_{n-1}, j}(t - T_{n-1}) \quad \cdots (3)$$

したがって，トリップの生起時間を考慮に入れた場合，(1)式はマルコフ再生過程の推移確率となる。以上のことを踏まえた上で，閉じたシステムにおける交通量を求めてみよう。1日の交通量を求めるにあたっては，まず$[0, t]$について考え，それを拡張することによって日交通量を求める。

今，時間tまでに各ゾーンを出発する累積交通量を行ベクトル$\mathbf{T}(t)$で表わす。$\mathbf{T}(t) = [T_1(t), \cdots, T_m(t)]$，mはゾーン個数．このとき，時刻tまでの各ゾーンの到着量は次式のような前向きマルコフ再生方程式を満足する。

$$\mathbf{V}(t) = \int_0^t \mathbf{T}(t - x)\, \mathbf{Q}(dx) + \int_0^t \mathbf{V}(t - x)\, \mathbf{Q}(dx) \quad \cdots (4)$$

ここに，$\mathbf{V}(t)$；$[0, t]$内の各ゾーンの到着交通量，$1 \times m$ ベクトル

$\mathbf{Q}(t)$；マルコフ再生過程の推移確率行列，$m \times m$ 行列

(4)式の第1項は$(t - x)$までに出発する交通量のうち残りx時間で目的ゾーンへ到着する交通量を示し，第2項は時間$(t - x)$までに到着した交通量のうちx時間後に目的ゾーンへ推移する交通量を示す。これを，たたみこみ*を使って表わすならば

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{T} * \mathbf{Q}(t) + \mathbf{V} * \mathbf{Q}(t) \quad \cdots (5)$$

また、時刻tまでの発生量，分布量は各々

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{T}(t - x)\, \mathbf{H}(dx) + \int_0^t \mathbf{V}(t - x)\, \mathbf{H}(dx) \quad \cdots (6) \qquad \mathbf{N}(t) = \int_0^t \overline{\mathbf{T}}(t - x)\, \mathbf{Q}(dx) + \int_0^t \overline{\mathbf{V}}(t - x)\, \mathbf{Q}(dx) \cdots (7)$$

たたみこみ形式で

$$U(t)=T*H(t)+V*H(t) \quad (8), \qquad N(t)=\bar{T}*Q(t)+\bar{V}*Q(t) \quad (9)$$

ここに，$U(t)$；時刻 t までの発生量，$1\times m$ ベクトル，$N(t)$；時刻 t までのＯＤ交通量 $m\times m$ 行列

記号ーは，行ベクトルの要素をそのまま対角要素に配列し直した対角行列を表わす。

ところで，(5)式の解はCinlarの結果[2]を応用すれば $V(t)=[T*Q(t)]*R(t)$ (10) として求められる。$R(t)$ はマルコフ再生行列と呼ばれるもので $R(t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q^{n*}(t)$ で定義され，その要素 $R_{ij}(t)$ は，時刻0で i ゾーンを出発する人が時刻 t までに j ゾーンを訪ずれる回数の期待値を表わしている。ここで(10)式を次のように変形する。

$$V(t)=T(t)*[R-I]=T(t)*R(t)-T(t) \quad \cdots(11)$$

(11)式を(8),(9)式に代入することによって(12),(13)式を得る。

$$U(t)=T(t)*R(t)*H(t) \quad (12), \qquad N(t)=\overline{T(t)*R(t)}*Q(t) \quad (13)$$

したがって，(12)式，(13)式をラプラス変換することによって時刻 t までの各ゾーンの発生量，ＯＤ交通量を得ることができる。ところで，1日の交通量を求めるには，定常過程について考えればよく，このとき各ゾーンの出発台数の時間的変動は考慮せず $T(t)\to T$ とおく。$T=[T_1,T_2,\cdots T_m]$ は各ゾーンの保有台数を示す。また，定常過程において，状態 i を訪ずれる回数の期待値，$E[M_i(t)]=\sum_k a_k R_{ki}(t)$ （a_k は初期確率）について，Cinlarは次式が成立することを示した[2]。

$$E\{M_i(t)\}=\frac{t w_i}{\sum_i w_i\bar{\tau}_i} \quad \cdots(14)$$

ここに，w_i；マルコフ連鎖の定常ベクトル $\boldsymbol{w}$ の要素

$$\bar{\tau}_i=\int_0^{\infty}t\,dH_i(t)=\sum_j P_{ij}\int_0^{\infty}t\,dF_{ij}(t)=\sum_j P_{ij}\tau_{ij}$$

$\lim_{t\to\infty}H(t)=I$，$\lim_{t\to\infty}Q(t)=P$ なる関係と(14)式を使って1日の交通量を求めると(15),(16),(17)式を得る。

$$U_i=\frac{T t w_i}{\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}} \quad (15), \qquad V_i=\frac{T t w_i}{\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}}-T_i \quad (17)$$

$$N_{ij}=\frac{T t w_i P_{ij}}{\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}} \quad (16)$$

T；総保有台数

ただし，(8)式から(15)式を得る過程で $T_i=Ta_i$ としている。初期確率 a_i は定常過程においては $a_i=\frac{w_i\bar{\tau}_i}{\sum_i w_i\bar{\tau}_i}$ である。ゾーンを出発する台数を Ta_i と仮定することは合理的であり，現実のパターンに対し良い近似を示す。(表-I)。ところで，発生量 U_i と到着量 V_i が一致しないのは初期トリップ数が到着量として数えられないためで，これらを等しくするためには，稼働時間を終えるともとのゾーンに戻るというトリップの一日完結性の仮定が必要である。この仮定によって t を稼働時間 ν に置き換えてやり最終的に得られるモデル式は

$$U_i=\frac{T\nu w_i}{\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}} \quad (18) \qquad N_{ij}=\frac{T\nu w_i P_{ij}}{\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}} \quad (19)$$

表-I　Ta_i によるゾーン保有台数の推定

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ta(i)	1367	2238	1480	2381	1937	2040	2232	2684	1981
survey	1337	1945	1519	2754	1974	2459	1808	2947	1600

表-II　(19)式によるＯＤ交通量の推定　　* 実績値　& 予測値

O \ D		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	*	2119	2113	1429	2813	309	1772	439	810	80
	&	2071	2071	1396	2757	303	1733	430	791	81
2		1887	4708	2770	4441	1220	3931	375	827	207
		1908	4738	2790	4472	1231	3959	369	841	205
3		1334	2435	6975	3967	3051	3423	110	212	22
		1352	2464	7064	4012	3096	3467	109	218	22
4		2807	4936	3935	11822	4446	10864	1473	1374	768
		2778	4882	3914	11741	4419	10733	1473	1347	758
5		450	1257	2709	4601	8230	4987	809	395	568
		466	1275	2771	4708	8410	5100	834	392	588
6		1724	3653	2937	10259	5441	16480	3224	1754	945
		1769	3777	3012	10565	5593	16970	3298	1817	1004
7		307	294	310	1379	681	3499	2930	227	870
		309	299	320	1398	694	3553	2977	235	886
8		905	735	330	1955	169	1391	411	2173	22
		874	710	320	1888	164	1342	398	2083	23
9		118	297	222	542	616	922	780	73	2234
		116	295	220	537	613	919	774	75	2230

Data source 文献(1)

(19)式において ν と $\bar{\tau}=\sum_i\sum_j w_i P_{ij}\tau_{ij}$ の間には $\nu=\beta\bar{\tau}$ という関係が成立することが期待される。このとき β は平均トリップ数を意味し，(19)式は $N_{ij}=T\beta w_i P_{ij}$ (20) というマルコフ連鎖モデルになる。このように(19)式は実質的にはマルコフ連鎖モデルと一緒であるが，異なる推定方法を示唆している。また，(20)式においては総トリップ数が外生的に与えられるのに対し(19)式はそれを内生的に与える。文献(1)に掲載されたデータを使用し，(19)式によりＯＤ量を推定したところ良い結果を得た。なお，文献(1)では $\nu=330$ 分と推定されている。τ_{ij} については，τ_{ij}=(i ゾーンの駐車時間)+(i-j 間走行時間)を使用した。

文献(1). 米谷，佐々木，西藤「マルコフ連鎖によるＯＤ交通量の推定」土木学会論文集 NO.129
(2) E.Cinlar "Markov renewal theory" Adv. Appl. Prob. 1. 1969