IV-61　調和関数による地形の線情報保管について

京都大学工学部　工博　正員　森　忠次
和歌山工業高等専門学校　正員　○星　仰

1. はじめに

地形情報の表現には格子法・ランダム法などがあり，格子法についてはすでに報告してきた。ここでは，ランダム法の中の線情報を取りあげ，与点である曲線上の分点からフーリエ級数を用いて線情報を再現することを念頭におきながら，分点保管やフーリエ級数の係数保管を想定した。しかし，保管容量がかなり大きくなるため，容量のコンパクト化が要求される。そこでコンパクト化という観点から，下記に示す 2^m 方向近似による固定ベクトル法がすぐれていると思われるので，閉合等高線などについてその有効性を検討してみた。その結果，固定ベクトル法は保管面では効果ある方法といえるが，再生演算・調整計算にかなりの時間を要することが明らかになった。また，フーリエ係数保管は保管容量では劣るが曲線の再生速度が速い利点があるといえる。

2. フーリエ級数による曲線再生

平面矩形領域（$0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq g$）において連続関数 $F(x, y)$ が一定時間 Δt ごとに与えられている時，Δt ごとの分点座標値を x_i，y_i（$i=1,2,\cdots n$）で表わすことにする。$F(x, y)$ が周期 2π をもち x，y は t の周期関数であると仮定することができるから，1周期を $2N$ 等分した $2N$ 個の分点座標 $t_r = r \cdot \frac{\pi}{N}$（$r=-N+1, -N+2, \cdots, 0, \cdots, N$）上の x_i の関数値を $f_r = f(t_r)$ とする。$f(t)$ の周期性を考慮して近似関数を $\cos kt \cdot \mathrm{SIN}\, kt$（$k$；整数）の一次結合で表わし，$n$ 次近似には $n \leqq N$ に対して次数を表わすことにすると一般に下記の関係式が成立つことが知られている。

$$\begin{aligned} X(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kt + B_k \mathrm{SIN}\, kt) \\ &= A_0 + (A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + A_3 \cos 3t + \cdots\cdots + A_n \cos nt) \\ &\quad + (B_1 \mathrm{SIN}\, t + B_2 \mathrm{SIN}\, 2t + B_3 \mathrm{SIN}\, 3t + \cdots\cdots + B_{n-1} \mathrm{SIN}(n-1)t) \quad \cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

ここで，$E \equiv \sum_{r=1-N}^{N} [f_r - X(t_r)] \rightarrow min$ から，$A_0, A_1, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_{N-1}$ の $2N$ 個の係数を決定することになる。これら $2N$ 個の関数系にはつぎの直交関係がある。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{r=1-N}^{N} \mathrm{SIN}\, jt_r \cdot \mathrm{SIN}\, kt_r = 0 \quad (j \neq k) \\ &\sum_{r=1-N}^{N} \cos jt_r \cdot \cos kt_r = 0 \quad (j \neq k) \\ &\sum_{r=1-N}^{N} \mathrm{SIN}\, jt_r \cdot \cos kt_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\text{また，} j = k \text{ の場合} \\ &\sum_{r=1-N}^{N} \mathrm{SIN}^2 kt_r = \sum_{r=1-N}^{N} \cos^2 kt_r = N \quad (k \neq 0, N) \\ &\sum_{r=1-N}^{N} 1 = 2N, \quad \sum_{r=1-N}^{N} \cos^2 Nt_r = 2N \end{aligned}\right\} (2)$$

極値条件として，$\partial E / \partial A_0 = 0$，$\partial E / \partial A_j = 0$，$\partial E / \partial B_j = 0$ より

$$\left.\begin{aligned} &A_0 = \frac{1}{2N} \sum_{r=1-N}^{N} f_r, \quad A_k = \frac{1}{N} \sum_{r=1-N}^{N} f_r \cos kt_r \quad (k \neq 0, N) \\ &A_N = \frac{1}{2N} \sum_{r=1-N}^{N} f_r \cos Nt_r = \frac{1}{2N} \sum_{r=1-N}^{N} (-1)^r \cdot f_r, \quad B_k = \frac{1}{N} \sum_{r=1-N}^{N} f_r \cdot \mathrm{SIN}\, kt_r \quad (k=0, N) \end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

となる。同様に y_i の関数値についても $f_r = f(t_r)$ として考えられるので次式が成立つ。

$$\begin{aligned} Y(t) &= A_0' + \sum_{r=1}^{n} (A_k' \cos kt + B_k' \mathrm{SIN}\, kt) \\ &= A_0' + (A_1' \cos t + A_2' \cos 2t + \cdots\cdots + A_n' \cos nt) \\ &\quad + (B_1' \mathrm{SIN}\, t + B_2' \mathrm{SIN}\, 2t + \cdots\cdots + B_{n-1}' \mathrm{SIN}(n-1)t) \quad \cdots\cdots (4) \end{aligned}$$

式（1）・（4）において，$n=N$ とすると式（3）で決定された係数に対する分点上の関数値 $X(t_r)$ は f_r と完全に一致することが知られている。ここでは，この場合についてのみ取り扱うことにした。むろん $Y(t_r)$ についても同様に取り扱う。

なお，x_i，y_i のオリジナルデータの抽出にはオリジナル曲線の弦長を一定にした抽出法と弧長を一定にした

抽出法とがあり，前者は式（5）後者は式（6）が成立することになる。図-2からの分点抽出には式（5）を使用して実験データを作成した。

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} = S = CONST \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\int_{t_1}^{t}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}\cdot dt = S = CONST \quad \cdots\cdots(6)$$

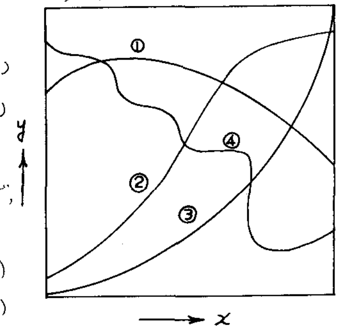


図-1　種々の線情報

3. 保管形式とその特性

保管形式の特性を調査するために，下記に示す項目のデータ保管を取り上げ，保管に必要なワード数などについて比較検討してみた。

(a) オリジナル分点座標値保管 ; x_i, y_i. ($i=1,\sim n$)
(b) フーリエ級数の係数保管 ; A_i, B_i. ($i=1\sim n$)
(c) フーリエ級数の係数保管 ; A_i, B_i, A_i', B_i' ($i=1\sim n$)
(d) 極座標保管 ; r_i, θ_i. ($i=1\sim n$)
(e) ベクトル保管 ; x_1, y_1, r_1, θ_i ($i=1\sim n$)
(f) 固定ベクトル近似保管 ; x_1, y_1, r_1, L_ℓ ($\ell=1\sim n/10$)

(a)はx yの分点座標を直接保管する方法で，一般に$2n$ワードの保管容量が必要である。もし有効けた数が4けた以内のときは保管容量を半減させることも可能であるが一般性はない。

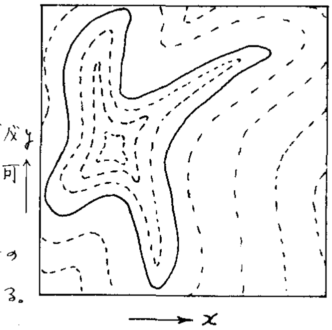


図-2　コンター情報

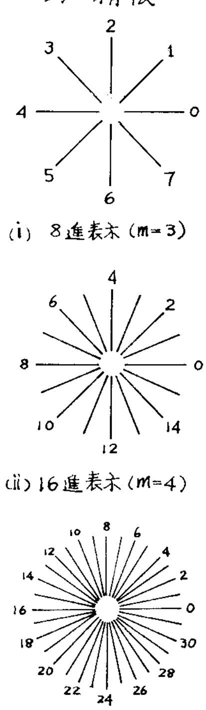
(b)は図-1 ①②③のようになめらかな曲線でx，yのいずれか一方をtの関数に置換しえる場合を想定した保管法で，$2n$ワードの保管容量を必要とする。この方法は，(a)と保管容量が同じであるが曲線の再生面ですぐれているため，総合的には(a)より実用性が高く，内挿点をすみやかに出力することができる。

(c)法は(b)で取り扱えない曲線を対象にしたもので，図-1の④や図-2の等高線などがその1例である。本法は一般性があるため適用範囲で最もすぐれているが，式(1)・(4)を併用するため，(a)(b)法の2倍の$4n$ワードの保管容量を必要とする。

(d)法は原点から各分点に至る距離rとx軸となす角θをx，yより算出する方法で$2n$ワードの保管容量が必要である。この方法は(a)と大差ない。

(e)法は初期値x_1，y_1とベクトル長rを頭初に保管し，x軸となす角θを保管するため，保管容量として$n+3$ワードあればよい。この方法の特徴はデータ変換演算時間を多少必要とするが，(a)・(b)・(d)法に比べて保管容量が半減する点にある。

(f)法は(e)法をさらにコンパクト化を促進させたもので，θを図-3 (i)(ii)(iii)のような固定ベクトルに近似させ，固定ベクトルに最も近いベクトル番号を保管する方法である。ベクトル方向数は2^mで与えることにし，$m=3$は8進，$m=4$は16進法で示してある。もし一方向ベクトルに対して，2けた表示が許されるなら，$m \leqq 6$であればよい。ベクトル番号Lが1けたで$m=3$ならば，保管容量が$n/10+3$ワードとなり，(a)・(b)・(d)法の約$1/20$となる。また，ベクトル番号が2けたで$4 \leqq m \leqq 6$ならば，保管容量は$n/5+3$ワードとなり，(a)・(b)・(d)法の約$1/10$となる。



(i) 8進表示 (m=3)
(ii) 16進表示 (m=4)
(iii) 32進表示 (m=5)
図-3

4. おわりに

この結果，固定ベクトル法が保管容量をコンパクトにして上記方法の中では最もデータ保管に効力を発揮すると思われるが，データ再生にかなりの時間を必要とする。また，保管を磁気テープや紙テープとした場合は，ワード数より全語長が問題となるので，ベクトル番号をベクトル記号文字で表現した方がよい。なお，フーリエ係数のコンパクト化については講演時にゆずる。