IV-59　条件観測解への条件追加法についての一考案

広島工業大学　正員　岡野兼夫

m個の観測値 Z_k，($k=1\sim m$)，に補正 $\overline{V}_k$ を与えて最確値 $\overline{Z}_k$ を求め，n個の条件式（$n<m$）--- $R_i+\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik}\cdot\overline{Z}_k=0$，($i=1\sim n$，$R_i$：定数)，を満足したいとき，閉差 W_i を求め置き，

a_{ik}：係数　P_k：Z_kの重み

$$Q_{ij}=Q_{ji}=\sum_{k=1}^{k=m}(a_{ik}\cdot a_{jk}/P_k)$$

を係数とする線型方程式

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3n} \\ \cdots & & & & \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{n3} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{K}_1 \\ \overline{K}_2 \\ \overline{K}_3 \\ \vdots \\ \overline{K}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -W_1 \\ -W_2 \\ -W_3 \\ \vdots \\ -W_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

閉差 $W_i=R_i+\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik}\cdot Z_k$

を解いて得られるコリレート（未定係数）$\overline{K}_i$ を用い，補正量 $\overline{V}_k$ を次式で計算しうる事は周知の通りである。

$$\overline{V}_k=(1/P_k)\sum_{i=1}^{i=n} a_{ik}\cdot \overline{K}_i$$

∴ 最確値 $\overline{Z}_k=Z_k+\overline{V}_k$

しかし，このように1度に解かずに，まず $W_2\sim W_n$ を解消するため，(1)の1行目と1列目を除いてできる

$$\begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3n} \\ \cdots & & & \\ Q_{n2} & Q_{n3} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K'_2 \\ K'_3 \\ \vdots \\ K'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -W_2 \\ -W_3 \\ \vdots \\ -W_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

を解き，$v'_k=(1/P_k)\sum_{i=2}^{i=n} a_{ik}\cdot K'_i$　を求めて

"第0最確値　$\tilde{Z}_k=Z_k+v'_k$

を決定すれば，$\tilde{Z}_k$ によって閉差 $W_2\sim W_n$ は零となり，第1条件の閉差 W_1 のみが新しい閉差 $\mathbb{W}$ に変る。

$$\mathbb{W}=R_1+\sum_{k=1}^{k=m} a_{1k}\cdot\tilde{Z}_k \qquad (3)'$$

しかる後

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3n} \\ \cdots & & & & \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{n3} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathbb{W} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

を解き　$\mathbb{V}_k=(1/P_k)\sum_{i=1}^{i=n} a_{ik}\cdot K_i$　を求めれば，最確値 $\overline{Z}_k=\tilde{Z}_k+\mathbb{V}_k$；この最確値が上記の(1)の解による最確値と全く同じであることは，容易に論証できる。　ところが，この $\mathbb{V}_k$ の内容を詳しく検討した結果，つぎの形に変形できることがわかった。

$$\mathbb{V}_k=\frac{a_0+b_0}{1-R} \qquad (4)$$

$$a_0=-\mathbb{W}\frac{a_{1k}}{Q_{11}P_k}, \qquad b_0=-\mathbb{W}\frac{X}{Q_{11}D_{11}P_k}$$

$$X=\sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{i+1}\cdot a_{ik}\cdot D_{1i}$$

$$R=(1/Q_{11}D_{11})\sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{i}\cdot Q_{1i}\cdot D_{1i}$$

D_{1i} は (1) または (3) の左辺の係数行列式を1行目について展開するとき得られる小行列式である。すなわち

$$D_{11}=\begin{vmatrix} Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & \cdots & Q_{3n} \\ Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & \cdots & Q_{4n} \\ \cdots & & & & \\ Q_{n2} & Q_{n3} & Q_{n4} & \cdots & Q_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_{12}=\begin{vmatrix} Q_{21} & Q_{23} & Q_{24} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{31} & Q_{33} & Q_{34} & \cdots & Q_{3n} \\ Q_{41} & Q_{43} & Q_{44} & \cdots & Q_{4n} \\ \cdots & & & & \\ Q_{n1} & Q_{n3} & Q_{n4} & \cdots & Q_{nn} \end{vmatrix}$$

さて，式(4)の分子にある a_0 は，第1条件の第0最確値(による)閉差 $\mathbb{W}=R_1+\sum_{k=1}^{k=m} a_{1k}\cdot\tilde{Z}_k$　すなわち前記(3)'の $\mathbb{W}$ を独立に解消する補正量　$v_k=-\mathbb{W}\cdot a_{1k}/Q_{11}\cdot P_k$ にまったく等しい。この v_k を実際に $\tilde{Z}_k$ に与えれば，これにより"第1最確値" $\tilde{Z}'_k=\tilde{Z}_k+v_k$ を得る。また，式(4) の分子の b_0 は，この第1最確値 $\tilde{Z}'_k$ によって第2条件～第n条件に発生する新しい閉差

$$W'_i=R_i+\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik}\cdot\tilde{Z}'_k \qquad i=2\sim n$$

を解消するための補正量　$v''_k=(1/P_k)\sum_{i=2}^{i=n} a_{ik}\cdot K''_i$ に正確に等しいことを証明できる。ここに K''_i は

$$\begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{23} & \cdots & Q_{2n} \\ Q_{32} & Q_{33} & \cdots & Q_{3n} \\ \cdots & & & \\ Q_{n2} & Q_{n3} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K''_1 \\ K''_2 \\ \vdots \\ K''_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -W'_2 \\ -W'_3 \\ \vdots \\ -W'_n \end{pmatrix} \qquad (2)'$$

を解いて定められるコリレートである。　この v''_k を実際に第1最確値 $\tilde{Z}'_k$ に与えれば，$W'_2\sim W'_n$ は零となり，最確値は"第2最確値" $\tilde{Z}''_k=\tilde{Z}'_k+v''_k$ に変る。

しかし，この $\tilde{Z}''_k$ が第1条件にまた新しい閉差 $\mathbb{W}'$ を生じることは止むをえない。そこでこの $\mathbb{W}'$ を理論

的に追跡してみると

$$W'=(W/Q_{11}D_{11})\sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{i}Q_{1i}D_{1i}=W\cdot R$$

となる。　∴ $R=W'/W$　(5)

条件追加調整法

以上より下記のような新しい調整法が見出された。

1) 条件群((0))を満足する既成プログラムがあり，これを用いて第0最確値$\tilde{Z}_k$が定められた後，単独の条件((1))を追加満足する必要を生じて，その閉差Wを計算したとしよう。$W=R+\sum_{k=1}^{k=m}a_k\cdot\tilde{Z}_k$；

この状態は，上記の式(1)を解いて全条件を一斉に満足する代りに，まず式(2)を用いて第1条件以外の各条件を満足する第0最確値$\tilde{Z}_k$を定めておき，次に残存第1条件の閉差Wを解消するために，式(3)を使って全条件を正しく満たす補正量V_kを求めようとするのと全く同じである。ただし，V_kとしては，式(4)の変形V_kを使用する方針を取る。式(3)は解かない。

2) 変形V_kを計算するため，まず追加条件の閉差Wを独立に解消するよう，追加条件((1))の単独補正量v_kを求め，第1最確値を定める。

$v_k=-W\dfrac{a_k}{Q\cdot P_k}$　　P_k：観測値Z_kの重み
　　a_k：追加条件式の係数

第1最確値　　$Q=\sum_{k=1}^{k=m}(a_k^2/P_k)$

$\tilde{Z}'_k=\tilde{Z}_k+v_k$

∴ $v_k=\tilde{Z}'_k-\tilde{Z}_k$　(a)

3) この第1最確値$\tilde{Z}'_k$が((0))の各条件に新しい閉差W'_iを生じるので，もう1回((0))を満足するプログラムを用いて，W'_iを解消する補正量v'_kを求め，第2最確値$\tilde{Z}''_k$を定める。

$\tilde{Z}''_k=\tilde{Z}'_k+v'_k$　∴ $v'_k=\tilde{Z}''_k-\tilde{Z}'_k$　(b)

4) この第2最確値$\tilde{Z}''_k$を用いて，もう1回，追加条件((1))の閉差W'を計算すれば

$R=W'/W$　(c)

5) しからば，第0最確値$\tilde{Z}_k$による追加条件((1))の閉差Wを消去して，追加条件を含む全条件を同時に満足する補正量V_kは，式(4)に(a),(b),(c)を入れ

$$V_k=\frac{a_0+b_0}{1-R}=\frac{v_k+v'_k}{1-(W'/W)}=\frac{\tilde{Z}''_k-\tilde{Z}_k}{1-(W'/W)}$$

よって，最確値 $\bar{Z}_k=\tilde{Z}_k+\dfrac{\tilde{Z}''_k-\tilde{Z}_k}{1-(W'/W)}$　(5)

$\bar{Z}_k$は条件群((0))と追加条件((1))を正しく満足する。

以上の方式の著しい特徴は：((0))満足後の追加条件((1))の初回閉差Wに対応するV_kの値を1度求めておけば，同一のデータについて(条件((2))を追加したため)全く同じ条件((0))+((1))を再度満足するに際して，まず条件群((0))を既成プログラムで満足してから，追加条件((1))の閉差W_bを計算するだけで済む点にある。なぜなら，この場合の最確値$\bar{Z}_k$が，同一データについてのR値定数のために

$\bar{Z}_k=\tilde{Z}_k+V_k\cdot(W_b/W)$　（$\tilde{Z}_k$：第0最確値 これでW_bを計算する。）

となることが論証されるからである。

この性質を活用すれば，簡単にいくらでも新しい条件を追加満足する一定の方式（アルゴリズム）を示すことができる。例えば，条件群((0))に単独条件((1))を追加した後，さらに単独条件((2))を追加する手順をフォートラン的な表現で示せば下記のようである。

観測値Z(I) 読み込み。 I=k
CALL A;…[((0))を満足するサブルーチン] $\underset{\tilde{Z}_k}{Z(I)}=\underset{Z_k}{Z(I)}+\underset{v'_k}{V(I)}$
Z1(I)=Z(I)…$\tilde{Z}_k$となったZ(I)をZ1(I)へコピイする。Z(I)=$\tilde{Z}_k$を保存
Z1(I)で((1))の閉差W(1)を計算し，これを消すZ1(I)を求める。
CALL A，→Z1(I)=Z1(I)+V(I)，((0))再満足 Z1(I)は$\tilde{Z}''_k$となる。
Z1(I)で((1))の閉差WWを計算，R(1)=WW/W(1)
保存V1(I)=(Z1(I)−Z(I))/(1.−R(1))，右辺Z(I)は$\tilde{Z}_k$
Z(I)=Z(I)+V1(I)　左辺Z(I)は$\bar{Z}_k$なので保存。W(1)も保存。
Z1(I)=Z(I)…$\bar{Z}_k$をZ1(I)へコピイして次の計算に使う。
Z1(I)で((2))の閉差W(2)を計算し，これを消すZ1(I)を求める。
CALL A　Z1(I)は((0))を満足する値をとる。
Z1(I)で((1))の閉差WWを計算，((0))((1))同時満足のZ1(I)を求める。
R(1)が関数的に一定でなくても成立
Z1(I)=Z1(I)+V1(I)*(WW/W(1))　WWは変化して可。
データが同じだからR(1)の値は同じである。
このZ1(I)で((2))の閉差WW計算，R(2)=WW/W(2)　保存
保存V2(I)=(Z1(I)−Z(I))/(1.−R(2))
Z(I)=Z(I)+V2(I)，右辺Z(I)は((1))追加の最確値。
左辺Z(I)は((1))((2))追加の最確値。

応用成果：複雑な調整を算術式化しやすい効用のほか **1)** 基線・検基線を角と同時に補正する三角網の調整方式は従来不可能とされてきたが，上記の"条件追加調整法"によって可能となる。これについては，すでに広島工大で実用演算に成功し，広島工大研究紀要(7巻1号・昭和47年11月)に調整算式とプログラムを紹介してある。　**2)** 将来，水準・トラバース・三角など条件観測ならどんなものでも誤差調整できる万能プログラムの開発に寄与すると思われる。