Ⅳ-36　都市における給配水施設建設問題に関するシステム分析

京都大学工学部　正員　吉川和広
京都大学工学部　正員　岡田憲夫

1.はじめに

われわれはいままでに給配水施設建設問題として，広域水道方式による段階的な浄水場建設問題あるいは浄水場・三次処理場の建設問題をとりあげていくつかのシステム分析を発表してきたが，ここでは配水施設のうち特に配水管の布設問題をとりあげ，これを数学モデルとして定式化するとともに，これらのモデルを多目的に運用することにより，興味ある基礎的な考察が可能であることを示すことにする。

2.モデルの定式化

<モデル化の前提>

①モデル化の対象は配水管網とポンプ施設に限り，配水池や浄水場などは取り扱わない．②配水池の位置・規模はあらかじめ決められており配水池は1ヶ所とする．③配水管網には大別して幹線と支管があるが，ここでは幹線網の配管のみを取り扱う．④管路網の布設場所は決まっている．⑤配水管網が構成する各格子内の地域を対角線で4つの3角形の部分に分割し，それぞれの区分の需要量を，その区分域に接する配水管が受けもつものとする．⑥各格子点での地盤高は決まっているものとする．⑦漏水は考えない．⑧対象期間をT年とし，施設は新規需要量に対応して一括して建設されるものとする．

<定式化に用いる記号>

q_i：管路i $(i=1,2,\cdots,n)$の流量，d_i：管路iの管径，l_i：管路iの長さ，h_i：管路iの損失水頭，C_i：管路iの流速係数，r_i：管路iの流水抵抗，Q_k：格子点kにおける流入・流出量，I_k：格子点kに接続する管路を要素とする集合，L_j：内部に他の閉管路をもたない閉管路ならびにそれを構成する管路の集合，R_k：配水池(ポンプ施設の設置位置も同じ)から格子点kにいたる任意の径路を1つの管路網と考え，この径路に属する管路網の集合，H_0：配水池の配水水面高，H_p：配水池における揚程，H_k：格子点kの地盤高，P_k：格子点kの水圧，P_{min}：格子点最低水圧，PP_a：水圧のバラツキの許容範囲，Q：全配水量，η：ポンプ合成率，e_p：上屋を含めたポンプ関係総建設費のKWあたりの単価，e_p'：KWhあたりの電力料金，ξ：ポンプ予備設備率，ξ'：総運転管理費中電力料金のしめる割合，r：利子率，T：対象期間，$\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$：管布設費を求める定数で管種，工法，径路，都市によって異なる．$f_{i\in L_j}$：閉管路L_jを構成する管路iに対してきまる整数で1または-1をとる．

≪モデル1≫

1)制約条件式

ⓐ連続条件

$$\sum_{i_+\in I_k} q_{i_+} - \sum_{i_-\in I_k} q_{i_-} = Q_k \quad (k=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここにi_+，i_-は$i\in I_k$のうち格子点kに流入する流量が流れている管路ならびに格子点kから流出する流量が流れている管路を表わしている。

ⓑ圧力条件

$$\sum_{i\in L_j} f_{i\in L_j} h_i = \sum_{i\in L_j} 10.366\, f_{i\in L_j} C_i^{-1.85} d_i^{-4.87} l_i q_i^{1.85} = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに

$$h_i = 10.366\, C_i^{-1.85} d_i^{-4.87} l_i q_i^{1.85} \quad \cdots\cdots(3)$$

ⓒ許容水圧条件

$$P_{min} = H_0 + H_p - \sum_{i\in R_{k^*}} f_{i\in L_j} h_i - H_{k^*} \geqq P_a \quad \cdots\cdots(4)$$

2)目的関数

配水施設(配水管網とポンプ施設)の建設費のうち対象期間T年全体にわたる償還額と維持費の総和を目的関数とする。すなわち

$$Z_1 = \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha d_i^{\beta} + \gamma) l_i + \frac{9.8QH_p}{\eta}(1+\xi)e_p\right]\frac{r(1+r)^T}{(1+r)^T-1}$$
$$+ T\,\frac{9.8QH_p}{\eta}\cdot\frac{24\times 365}{\xi'}\,e_p' \to \mathrm{Min.} \quad \cdots\cdots(5)$$

なお(3)式において$H_p<0$のときは，上式において$H_p=0$とする。

3)モデル1の解法

モデル1はq_i，d_i $(i=1,\cdots,n)$を未知変数とする非線形計画問題であるが，ここでは最大傾斜法を応用することにより解を求めることにする。

4)モデル1の運用方法

モデル1では許容水圧が満たされればよかったが，この条件のかわりに水圧のバラツキが許容範囲にあればよいという条件で置き換えることも考えられる．すなわち

ⓓ等圧化制約条件

$$\sum_{k=1}^{m}\left(P_k - \sum_{i=1}^{m} P_i/m\right)^2 \leqq PP_a \quad \cdots\cdots(4)$$

つぎに等圧化をさらに促進する方法として許容水圧からの水圧のバラツキの最小化を目的関数とし，(1),(2),(4)式を制約条件とする場合が考えられる。

$$f_2(g_2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)'$$

$$g_2=(g_{21}\, g_{22}\, g_{23}\, g_{24}\, g_{25}\, g_{26}\, g_{27})$$

$$P_1 g_1 + P_2 g_2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)'$$

$$Z_3=\sum_i h_{1i}(g_{1i})+\sum_j h_{2j}(g_{2j}) \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \cdots\cdots (11)'$$

したがってラグランジェ関数は

$$\begin{aligned} L(g_1, g_2, \lambda, \mu, \rho) &= \sum_i h_{1i}(g_{1i})+\sum_j h_{2j}(g_{2j}) \\ &\quad + \lambda f_1(g_1)+\mu f_2(g_2)+\rho(P_1 g_1+P_2 g_2) \\ &= \sum_i h_{1i}(g_{1i})+\lambda f_1(g_1)+\rho P_1 g_1 \\ &\quad + \sum_j h_{2j}(g_{2j})+\mu f_2(g_2)+\rho P_2 g_2 \\ &= L_1 + L_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12) \end{aligned}$$

ここに

$$L_1=\sum_i h_{1i}(g_{1i})+\lambda f_1(g_1)+\rho P_1 g_1 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$L_2=\sum_j h_{2j}(g_{2j})+\mu f_2(g_2)+\rho P_2 g_2 \quad \cdots\cdots (14)$$

極値をとるための必要条件は，$\frac{\partial L}{\partial g_1}=0$，$\frac{\partial L}{\partial g_2}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \mu}=0$ であるが，これは結局 $\frac{\partial L_1}{\partial g_1}=0$，$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda}=0$，$\frac{\partial L_2}{\partial g_2}=0$，$\frac{\partial L_2}{\partial \mu}=0$ と同値である。このことはつぎのようなことを意味している．

(1) あらかじめ何らかの方法で ρ の値を仮に ρ_0 と決めたとする．

(2) このとき上記の必要条件を満たす g_1, g_2 を求める問題は，つぎの2つの問題に相等している．

[I] $$Z_3^{\mathrm{I}}=\sum_i h_{1i}(g_{1i})+\rho P_1 g_1 \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \cdots\cdots (15)$$

$$f_1(g_1)=0 \quad \cdots\cdots (16)$$

[II] $$Z_3^{\mathrm{II}}=\sum_j h_{2j}(g_{2j})+\rho P_2 g_2 \rightarrow \mathrm{Min.} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$f_2(g_2)=0 \quad \cdots\cdots (18)$$

(3) このようにして得られた g_1, g_2 は ρ をパラメーターとする値になるが，このときラグランジェ関数 L について考えてみると g_1, g_2 については極小であるが，ラグランジェ乗数 ρ については極大となる．このことは ρ の値の修正にあたっては $dL \geqq 0$ となるようにすればよいことがわかる．ところが

$$dL=(P_1 g_1+P_2 g_2)\,d\rho \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

であるので $dL \geqq 0$ となるためには

$$d\rho=\alpha_k\left[P_1 g_1+P_2 g_2\right] \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

とおいてステップ k の ρ^k をつぎのように再調整する．

$$\rho^{k+1}=\rho^k+d\rho \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

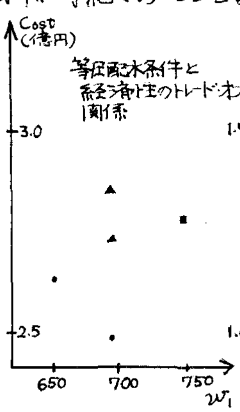
この新しい ρ^{k+1} を使って，以下(2),(3)のプロセスを繰り返すことになる．なおつぎの条件が近似的に満たされればこの手順を終了する．そしてこのときの g の値 $\hat{g}$ を最適解の近似値とみなす．

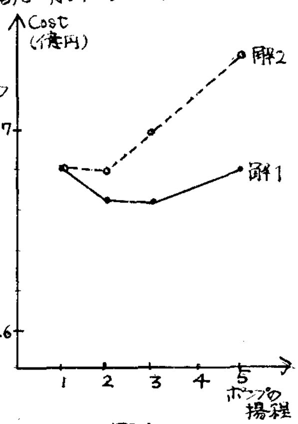
ここで注意すべきことは，このようにして得られた最適解が必ずしも全域的最適解（global optimum）に一致しているとは限らない訳である．モデル2の場合 $f_1(g_1)=0$，$f_2(g_2)=0$ が g_1, g_2 について線形であるが，Z_3^{I}，Z_3^{II} は必ずしも狭義凸関数である保証はないので，全域的最適解が常に得られているとはかぎらない．

以上のようにして2地域における配水管網の結合問題は，各地域の配水管の布設問題とこれを結合調整する問題に分解して解くことができることがわかった．もし $f_1(g_1)$，$f_2(g_2)$ ならびに $h_{1i}(g_{1i})$，$h_{2j}(g_{2j})$ がすべて線形関数であれば上記の考え方は Dantzig によって開発された Decomposition 原理に相等していることが容易に示される．

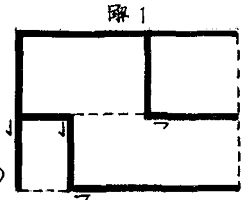
3. おわりに

ここでは配水管網の布設問題を数学モデル（モデル1ならびにモデル2）として定式化するとともにこれらのモデルの運用方法を検討することにより多角的な分析が可能であることを説明した．

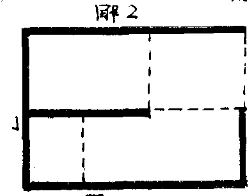




解1



解2



⌐ はポンプの設置場所，━ は配水管の布設場所，- - - - - は布設しない場所を示す．

ⓔ等圧化目的関数

$$w_1=\sum_{k=1}^{m}(P_k-P_a)^2 \to Min. \quad \cdots\cdots(5)'$$

あるいは(4)式が成立するので

$$w_2=\sum_{k=1}^{m}P_k \to Min. \quad \cdots\cdots(5)''$$

(4)式を除く場合には

$$w_3=\sum_{k=1}^{m}\left(P_k-\sum_{i=1}^{m}P_i/m\right)^2 \to Min. \quad \cdots\cdots(5)'''$$

さらにこのような目的関数を用いる場合には，関連費用に関する制約をつけることもできる．すなわち

$$z_1 \leqq Z_{max} \quad (Z_{max}：関連費用の最大許容額)$$

なおモデル化の前提として配水池の位置は決まっていてかつ一ケ所のみと考えたが，配水池の位置や数を未知とし，これらをパラメーターとして種々の場合を設定し，それぞれの場合について問題を解くことにより，配水池の位置や数を評価することも可能である．

モデル1の運用方法にはこの他にも色々考えられるが紙数の都合上省略する．

《モデル2》

上記のモデル1でも等圧化の問題を取扱うことができるが，各格点で完全な均等水圧が保証されてはいない．そこでこれを保証するために，各管路の動水勾配 h_i が地盤勾配に等しくなるようにすると h_i は定数になる．ところが(3)式を使って d_i を q_i の関数として表わすことができる．このとき(2)式は自動的に成立するから結局問題はつぎのように表わされる．（ポンプの施設は別個に考える．）

1)制約条件式

$$\sum_{i_+\in I_k} q_{i+} - \sum_{i_-\in I_k} q_{i-} = Q_k \quad (k=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$Z_2=\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar\alpha q_i^{\bar\beta}+\gamma)l_i\right]\frac{r(1+r)^T}{(1+r)^T-1} \to Min. \quad \cdots\cdots(7)$$

あるいは Z_2 の評価にあたっては T は無関係であるから

$$Z_3=\sum_{i=1}^{n}(\bar\alpha q_i^{\bar\beta}+\gamma)l_i \to Min. \quad \cdots\cdots(7)'$$

ここに $\bar\alpha$, $\bar\beta$ は管布設費に関する定数である．

2)モデル2の解法

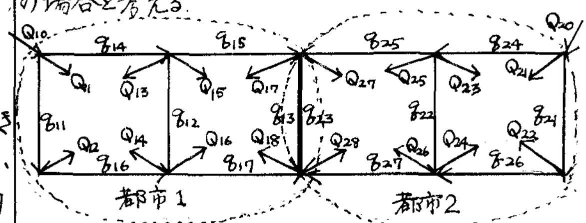
制約条件が線形で目的関数が非線形であるので，後者を線形近似することによりLPの一般的な解法が使える．

3)モデル2の運用方法

モデル2は均等圧配水がなされるという条件の下に関連費用が最小になる q_i を求める問題になっている．以下では，非線形問題に対する分解法の原理を適用することにより2地域(または3地域以上)における配水管網の結合問題に対する基礎的な考察が可能であることを示すことにする．

＜2地域における配水管網の結合問題への応用＞

都市の発展・膨張とともに都市の境界とは無関係に都市化が進展しているため，配水網の整備も単に従来のような各都市が単独に実施するという方式では不合理になりつつある．したがって配水網の整備においても各都市の行政区域にとらわれない布設方法を検討することは重要である．その場合，各都市で独自に施設整備を行なうときとの比較ならびに複数の都市が共同して配水網を整備する上で相互にどのような調整が必要なのかという問題を考察する必要がある．このような観点からここではモデル2を利用して説明することにする．簡単な例として図1の場合を考える．



$$\begin{cases} q_{11}+q_{14}=Q_{10}-Q_{11} \\ q_{11}-q_{16}=Q_{12} \\ -q_{12}+q_{14}-q_{15}=Q_{13}+Q_{15} \\ q_{12}+q_{16}-q_{17}=Q_{14}+Q_{16} \end{cases} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\begin{cases} q_{21}+q_{24}=Q_{20}-Q_{21} \\ q_{21}-q_{26}=Q_{22} \\ -q_{22}+q_{24}-q_{25}=Q_{23}+Q_{25} \\ q_{22}+q_{26}-q_{27}=Q_{24}+Q_{26} \end{cases} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\begin{cases} q_{15}-\frac{1}{2}q_{13}+q_{25}-\frac{1}{2}q_{23}=Q_{17}+Q_{27} \\ q_{13}-q_{23}=0 \\ q_{17}+\frac{1}{2}q_{13}+q_{27}+\frac{1}{2}q_{23}=Q_{18}+Q_{28} \end{cases} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$Z_3=\sum_{i=1}^{7}(\bar\alpha_1 q_{1i}^{\bar\beta_1}+\gamma_1)l_{1i}+\sum_{j=1}^{7}(\bar\alpha_2 q_{2j}^{\bar\beta_2}+\gamma_2)l_{2j} \to Min. \quad \cdots\cdots(11)$$

上で定式化された問題は都市1のみの配水網布設問題（(8)式で定式化されている．）と都市2の配水網布設問題（(9)式で定式化されている．）ならびにこれを結合する問題（(10),(11)式）の3つの部分に分かれていることがわかる．これをベクトル表示すればつぎのようになる．

$$f_1(q_1)=0 \quad \cdots\cdots(8)'$$

$$q_1=(q_{11}\ q_{12}\ q_{13}\ q_{14}\ q_{15}\ q_{16}\ q_{17})$$