

山梨大学工学部 正員 平島健一
東京大学大学院 学生員・中川 茂

1. まえがき

表面荷重あるいは表面変位が与えられた等方性の半無限弾性体の境界値問題の解は Boussinesq¹⁾をはじめとして多数の研究者により各種の問題と対象として提案されてゐる。他方、現実の基礎状態と考慮に入れた上記の解と補正した異方性体とした場合の解も Michell, Wolf, Barden, Pickering, Moroto²⁾あるいは Nagak³⁾らの研究者によって具体的荷重分布の例に対して考察検討がなされてゐる。

本文も鉛直Z軸に同じ対称性と有する半無限異方性体(横異方性体)を対象とし、表面に矩形分布の鉛直荷重(等分布荷重となくともよい)が作用する場合の応力および変形状態と解析的に求めたものである。数値計算例は等分布鉛直方向に作用する矩形状の荷重の場合に対して実施し、応力、変形の分布図が示される。

2. 横異方性体内の応力, 変位

軸対称の内柱座標系で表わした横異方性体の応力, 変位の関係は、Zを鉛直軸、rを水平軸として次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_{rr} \sigma_\theta - \nu_{rz} \sigma_z), \quad E_\theta = \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_{rr} \sigma_r - \nu_{rz} \sigma_z) \\ E_z &= \frac{1}{E_z} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{E_z} \sigma_z, \quad \nu_{rz} = \frac{1}{G_{rz}} \tau_{rz} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

==に、 E_r ($\equiv E_\theta$) は水平方向の、 E_z は鉛直方向の Young 率
 ν_{rr} , ν_{rz} は Poisson 比、 G_{rz} はせん断弾性係数である。

これらの弾性定数は、ひずみエネルギーの正値形式で仮定するに次のような条件を満足しなくてはならぬ⁴⁾。

$$(a) E_r, E_z, G_{rz} \text{ は正}, (b) -1 < \nu_{rr} < 1, (c) E_r E_z (1 - \nu_{rr}) - 2 \nu_{rz}^2 > 0$$

したがって、 ν ($\equiv E_r/E_z$) の各種の値に対して ν_{rr} , ν_{rz} の関係は Fig. 1 に示す放物線の内側の値にとる必要がある。

さて、任意形状の分布荷重が表面に作用した場合の応力, 変位について考えよう。

いま X, Y 表面上のある部分 S に分布荷重が作用してゐるものとせば、例として鉛直応力 $\sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$ は

$$\sigma_z = \frac{p_0}{2\pi\sqrt{d}(s_1-s_2)} \iint_S \left\{ \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + s_1^2 z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + s_2^2 z^2]^{3/2}} \right\} P(\xi, \eta) d\xi d\eta \dots (2)$$

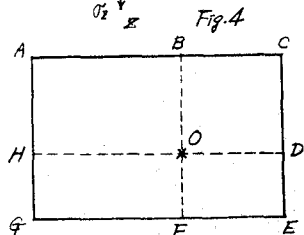
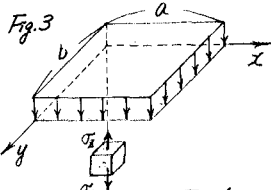
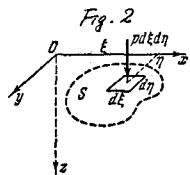
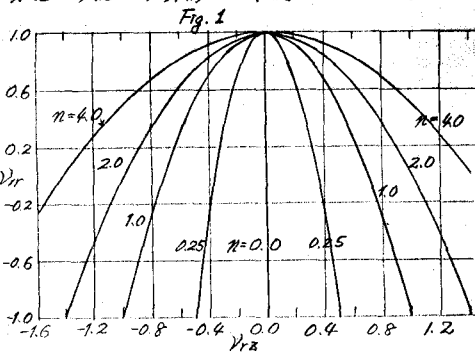
で求められる。==に d , s_1 , s_2 等は対象とする横異方性体の弾性定数から求められるものである⁵⁾。

例えば、Fig. 3 に示す矩形状の鉛直荷重 p_0 が作用する場合の Z 軸上の鉛直応力 σ_z ならびに鉛直変位 w は次式で与えられる二重積分を実行すればよい。その結果は

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p_0}{2\pi\sqrt{d}(s_1-s_2)} \iint_S \left\{ \frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right\} r dr d\theta \\ &= \frac{p_0}{2\pi\sqrt{d}(s_1-s_2)} \left\{ \frac{1}{s_1} \tan^{-1} \frac{ab}{s_1 z \sqrt{a^2 + b^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{1}{s_2} \tan^{-1} \frac{ab}{s_2 z \sqrt{a^2 + b^2 + s_2^2 z^2}} \right\} \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_0}{2\pi\sqrt{d}E_z(s_1-s_2)} \iint_S \left\{ -\frac{1}{s_1^2 (r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} + \frac{1}{s_2^2 (r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}} \right\} r dr d\theta \\ &= \frac{p_0}{2\pi\sqrt{d}E_z(s_1-s_2)} \left\{ -\frac{1}{s_1^2} A + \frac{1}{s_2^2} B \right\} + \frac{p_0 \nu_{rz}}{2\pi\sqrt{d}E_r(s_1-s_2)} \left\{ (-A+B) + \frac{d}{ac-d} (g_1 A - g_2 B) \right\} \dots (4) \end{aligned}$$

ただし、 a, b, c, g_1, g_2 および A, B 等はそれぞれ弾性定数で定まる学数および積分を実行した際に導き出される関数であるが、かなり複雑な式のため、==では省略する。(3)(4)式のように矩形状の荷重の偏角部(Z軸上)の応力, 変位が求まったから、長方形と適当に重ね合わせることによって任意点の応力 σ_z および変位 w も容易に求められることが可能である (Fig. 4 参照)。



3. 数値計算例

数値計算を実施するに当って、対象とする媒体のせん断弾性係数 G_{xz} の値は Barden の行った仮定¹⁾ によって、 $G_{xz} = \frac{E_r}{1+n+2\nu_{rz}}$ とした。

まず前節で得られた解析解の妥当性と検証するために、等方性とした矩形分布荷重の場合の Steinbrenner²⁾ の結果、異方性とした軸対称(円形)分布荷重の場合の Moroto³⁾、Nayak⁴⁾ の結果と比較を行ったが充分な精度で一致することを確認した。

幾つかの数値計算結果を示そう。Fig. 5 は $n = \frac{E_r}{E_z} = 1.01$ (等方性に近き場合) とおき、ポアソン比 ν_{rz} , ν_{rz} を三種類に変化させた、正方形等分布荷重 p による中央線 n 下の半無限体内に生じる圧力球根である。この例から、 ν_{rz} の値が大きいくほど、応力 σ_z が深さ方向に伝達しにくく、逆に ν_{rz} の値が大きいくほど、応力 σ_z が深さ方向に影響を及ぼすことが理解される。次に、 n が変化する場合の例を Fig. 6 に示す。この図は n を 0.50, 2.00 および 10.0 と変化させていった場合 ($\nu_{rz} = \nu_{rz} = 0.30$ とした) の圧力球根である。荷重 p による圧力球根と求めた位置は Fig. 5 の場合と同じである。これによれば、 n (したがって E_r) が小さい方が細長い球根となって深い所まで応力 σ_z が伝達し、 n が大きくなると、応力 σ_z は深さ方向には伝わりにくくなり、横にはらみ出しで広く浅い形状となる。

Fig. 5

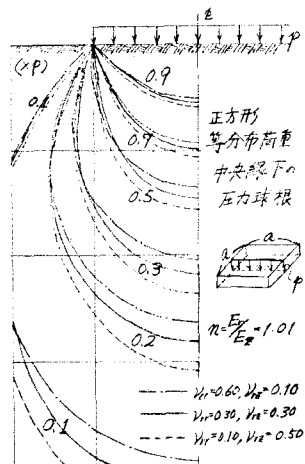


Fig. 6

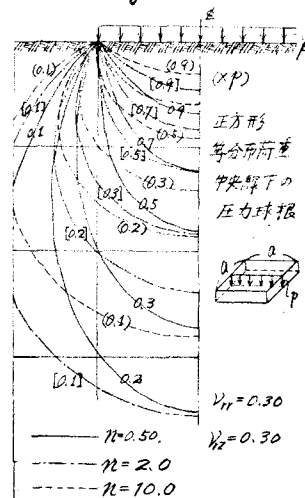
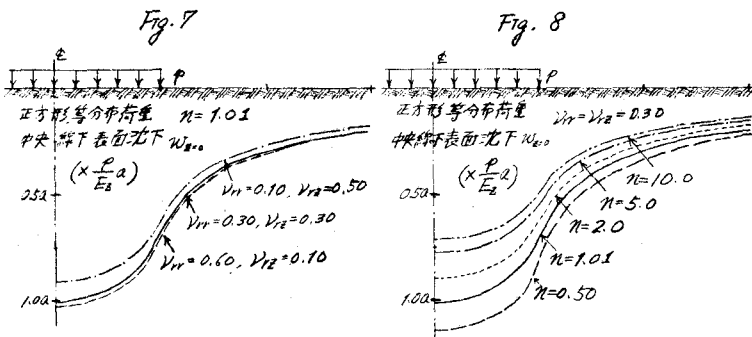
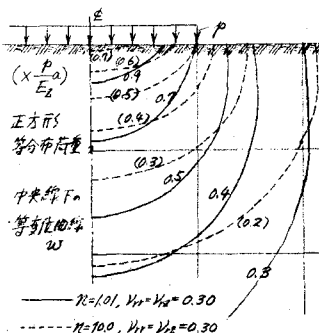


Fig. 9



次に、Fig. 7 は Fig. 5 の状態での中央線 n 下の表面沈下 $w_{z=0}$ の分布である。これより、 ν_{rz} の方が ν_{rz} よりも変位に大きく影響を及ぼしていることが理解される。同様に、Fig. 8 は Fig. 6 に対応する表面沈下 $w_{z=0}$ の分布図である。これは E_r のより小さい値によって、表面沈下はより大きくなり、 E_r のより大きな値によって表面沈下はより小さくなることを示している。Fig. 9 は正方形中央線下の等変位曲線である。等方性に近い場合 ($n=1.01$)、異方性の顕著な場合 ($n=10.0$) を通じて、載荷域からある距離はなれた線上では表面変位よりも、多少大きな変位を生じる部分が存在することが観察される。また、 E_r の大きい方が変位量は小さく、変位も深さ方向に伝達しにくくなる。

4. おわりに

その他の計算例および詳細は講演会当日に譲る。

- 参考文献: 1) L. Barden, *Geotechnique*, Vol. 13 (1963), pp. 198~210. 4) M. Nayak, *Soils and Foundations*, Vol. 13 (1973), pp. 83~90. 5) 最上武雄編「土質力学」技報堂, pp. 296~306.
2) D. J. Pickering, *Geotechnique*, Vol. 20 (1970), pp. 271~276. 3) N. Moroto, *Proc. of JSCE*, No. 212 (1973), pp. 121~129. 6) S. G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body* (1963), pp. 347~383.