

京都大学工学部 正会員 赤井 浩一

同 同 足立 紀尚

同 同 田村 武

1. 序 飽和粘土が弾性体としての構造骨格と、非圧縮性流体としての間隙水とによつて構成されていると考えるとき、載荷による最終変形状態は明らかに構造骨格の弾性定数のみで定まるが、初期変形については、構造骨格と同じせん断弾性係数をもつ非圧縮性弾性体として解析せねばならない。しかるに、一般に変位で表現した基礎方程式としての Navier の式は、ポアソン比 $\nu = 1/2$ で不定項をもち物理的な意味を失う。また数値解析上からも、 ν が $1/2$ に近づくと計算誤差が卓越することが知られている。これに関連して Herrmann¹⁾ は、等方応力成分に比例する量を新たな独立変数に選ぶことにより、 $\nu = 1/2$ をも含めた任意のポアソン比の場合に対して成立する基礎方程式を提示した。ここでは、この手法にもとづいて非圧縮性およびそれに近い弾性体に有効な変分原理を示し、これを盛土基礎地盤の変形解析に応用した結果を述べる。

2. 変分原理 Herrmann の方法は、数学的には体積ひずみ θ と変位 u^i との間の制約条件 $\theta - u^i{}_{/i} = 0$ のもとで変分原理を記述することである。通常の弾性体では、ひずみエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \frac{\mu}{4} g^{ik} g^{jl} (u_{k|l} + u_{l|k})(u_{i|j} + u_{j|i}) \quad (1)$$

で表わされるが、非圧縮性の場合上式は右辺第1項を省略することでもそのまま成立する。このことに留意して、さきの制約条件下で u^i と θ 、さらに制約条件に乗するべき Lagrange 乗数 α をそれぞれ独立変数とみなし、全ポテンシャルエネルギーを最小にするための停留条件を求めれば、つりあい方程式やその他の条件式が誘導される。このさい最小とすべき汎関数は

$$\begin{aligned} \Pi(u_i, \theta, \alpha) = & \int_V \left\{ \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \frac{\mu}{4} g^{ik} g^{jl} (u_{k|l} + u_{l|k})(u_{i|j} + u_{j|i}) - F_i u^i - \alpha (\theta - u^i{}_{/i}) \right\} dV \\ & - \int_{S_0} T_i u^i dS \end{aligned} \quad (2)$$

である。実際、この第1変分をとつてみると、

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_V \left\{ \lambda \theta \delta \theta + \frac{\mu}{2} g^{ik} g^{jl} (u_{k|l} + u_{l|k})(\delta u_{i|j} + \delta u_{j|i}) - F_i \delta u^i - \alpha (\delta \theta - \delta u^i{}_{/i}) \right\} dV \\ & - \int_{S_0} T_i \delta u^i dS \end{aligned} \quad (3)$$

となり、 $\delta u^i{}_{/i}$ などについて部分積分を行つて独立な変分についてまとめると、次の停留条件が求められる。

$$\begin{cases} \lambda \theta - \alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g^{ik} u_{i|j|k} + g^{ik} u_{j|k|i} + \frac{1}{\mu} \alpha{}_{/i} + \frac{1}{\mu} F_i = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta - u^i{}_{/i} = 0 & (6) \end{cases}$$

いま $\theta/(1-2\nu) = H$ とおけば $H = 0_m/E$ となり、これは $\nu \rightarrow 1/2$ でも定義される。式(4)を変形して

$$\alpha = \lambda \theta = 2\mu\nu\theta/(1-2\nu) = 2\mu\nu H \quad (7)$$

とし、これを式(5)、(6)に代入すると、求める基礎方程式が次の両式で表現できる。

$$\begin{cases} g^{ik} u_{i|j|k} + g^{ik} u_{j|k|i} + 2\nu H{}_{/i} + \frac{1}{\mu} F_i = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2\nu) u^i{}_{/i} - H = 0 & (9) \end{cases}$$

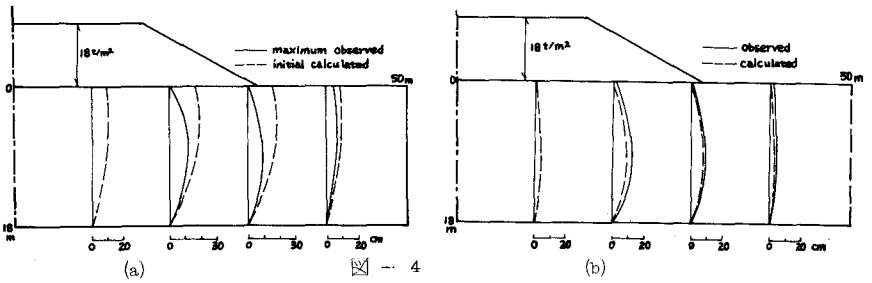
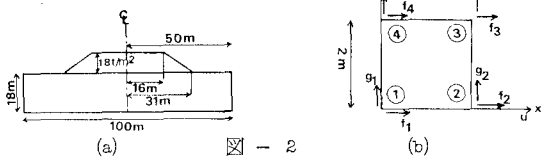
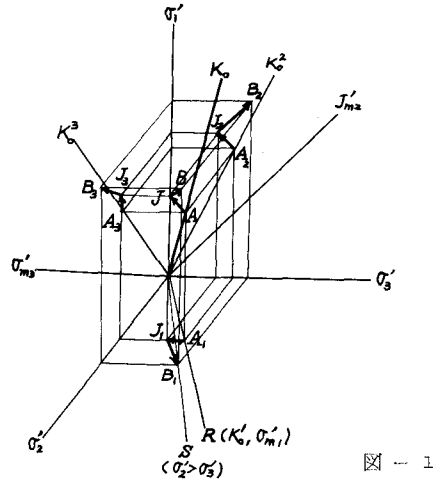
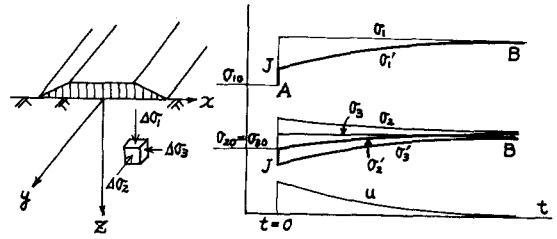
3. 数値計算法 式(2)で示される汎関数 Π は、その停留条件として任意のポアソン比に対する基礎方程式を含んでいるが、停留条件の一部である式(4)をあらかじめ束縛条件として Π に課しておいても停留条件その他は変わらない。このようにすると、式(2)の Π と等価で独立変数の少ない汎関数 $\Pi^*(u_i, H)$ が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Pi^*(u_i, H) = & \int_V \left[\mu \left\{ \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} (u_{k|l} + u_{l|k}) \right. \right. \\ & \times (u_{i|j} + u_{j|i}) + 2\nu H u^i{}_{|i} - \nu(1-2\nu)H^2 \Big\} \\ & \left. \left. - F_i u^i \right] dV - \int_{S_f} T_i u^i dS \quad (10) \end{aligned}$$

すなわち、この Π^* の停留条件は式(8)、(9)に一致する。したがって、FEMで数値計算を行う場合、適当な要素を仮定して Π^* の積分項を節点変位の関数に改めて、剛性マトリックスを求めることができる。

4. 盛土基礎地盤の変形解析 図-1は二次元圧密における主応力の推移と、主応力空間における有効応力径路を模式的に示している。このような盛土基礎地盤の変形解析への応用として、図-2(a)のような有限厚の弾性地盤を(b)のように2m四方の正方形要素に分割し、各要素に対して $\Pi^* = \min$ の条件より剛性マトリックスを求め、各節点でつりあい式を、また各要素で式(9)を立て、連立方程式を解くことによって節点変位と等方応力成分(間けき水圧)を求めた。(a)の境界条件として下端は完全固定、左右端では水平変位を拘束し、かつ鉛直方向にはなめらかであるとしている。また、観測が行われた現地の粘土試料のせん断試験より、構造骨格のヤング率 $E = 400 \text{ t/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.301$ を用いた。

計算結果として、図-3に沈下曲線、図-4に側方変位の分布曲線を、それぞれ実測値と対比して示した。計算に伊藤節治君の助力を得た。



1) L.Herrmann: Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Method, AJAA Jour., Vol. 3, No. 10, 1965