

(株) 日 建 設 計 正 員 小 澤 良 夫

有限要素法の地盤工学への応用は、1966年CloughとWoodwardがこの方法をアースダムの応力と変形の解析に用いて以来、広く研究され、この課題に関する論文も数多く発表されている。しかしながら有限要素法による解析の精度と効率を改良し、新しいタイプの問題に応用するためには、まだ種々の問題が残されている。

ここでは、現在よく用いられている“非線形弾性解析”の概要とその欠点を述べ、究極的な有限要素法の精度の改良につながる“弾塑性解析”の一方法について報告する。

非線形、弾性解析の方法

土の非線形の性質を近似するため、最もよく用いられている方法は、多分“荷重漸増法”である。この方法では載荷重がいくつかの小さい増分に分割され、各増分では土は弾性であると仮定されている。各増分に対する各要素の弾性係数やポアソン比はその要素の応力にしたがって計算される。したがって、非線形の応力-ひずみ関係は一連の線形関係によって近似されている。

DuncanとChang(1970)は、双曲線の応力-ひずみ関係と応力に依存した材料の性質を利用して、与えられた応力状態に対して、つぎのような接線弾性係数に対する式を導いた。

$$E_t = K \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f \cdot (1 - \sin \phi) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \sin \phi} \right]^2$$

ここに、 K 、 n と R_f は応力-ひずみ関係を表わすための定数、 P_a は大気圧、 σ_1 と σ_3 は最大および最小主応力、 C と ϕ はモール・クーロンの強度定数である。

Kulhawy, DuncanとSeed(1969)は、ポアソン比に対しても同じような方法で次式を導いた。

$$\nu_t = \frac{G - F \log(\sigma_3 / P_a)}{1 - \frac{d \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{K \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f \cdot (1 - \sin \phi) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \sin \phi} \right]^2}}$$

ここに、 G 、 F と d はポアソン比を表わすための定数である。

破壊後の土の挙動をより正確に示すため、つぎの式を用いる方が望ましいことが示された。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_b + M_D & M_b - M_D & 0 \\ M_b - M_D & M_b + M_D & 0 \\ 0 & 0 & M_D \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ここで M_b は Bulk Modulus であり、 M_D は Shear Modulus である。破壊後は M_D を破壊前と同じ値に保ちながら M_D を 0 に減らすことによって、土が破壊後、体積圧縮に対して高い抵抗を示すが、せん断変形に対しては抵抗が小さいという性質を表わしている。

この応力-ひずみのモデルは、種々の地盤工学の実際問題に広く用いられてきた。しかしながらこの方法にはつぎのような欠点が含まれている。

- (1) たとえ弾性係数やポアソン比が応力に応じて再評価されても、この方法によって計算されたひずみは弾性の性質をもっている。すなわちひずみの増分の方向は応力の増分の方向に一致している。しかしながら、土は破壊に近づくとき、一般に塑性変形をなし、ひずみの増分の方向は応力の方向に一致する。
- (2) せん断応力が変化しても、体積変化が起らない。すなわち土はダイレイタンスの性質を有しないと仮定されている。しかしながら、ダイレイタンスは非常に重要な土の性質である。
- (3) 中間主応力は土の応力-ひずみ関係や強度に影響を及ぼさないと仮定されている。しかしながら、多くの実

験結果から、中間主応力が土の挙動にかなり影響を及ぼすことが示されている。

- (4) この非線形弾性解析方法では、さらに、等方圧 σ_3 が減少する場合について、土の挙動と正確に計算することができないことが示されている。(Duncan & Chang, 1972)

現在よく用いられている非線形弾性解析は上述したような欠点を有し、この改良には、土の弾性と塑性の性質をともに考慮することができるとある応力-ひずみのモデルを用いる必要がある。

弾塑性応力-ひずみ関係

弾塑性応力-ひずみ関係を導くために、つぎのような塑性理論に関する概念と仮定が必要である。

- (1) Yield Function この函数は Yield Surface と呼ばれる応力空間の表面を定義する。この表面は弾性ひずみのみ生ずる応力状態（この表面の内側）と弾性と塑性ひずみが生ずる応力状態（この表面の外側）の境界に存在する。yield function は work-hardening の物質に対して、一般に次式で表わすことができる。

$$f(\sigma, \epsilon^p) = 0$$

ここに σ は応力ベクトル、 ϵ^p は塑性ひずみベクトルである。

- (2) Plastic Potential Function 塑性ひずみの増分の成分を計算することができる plastic potential function が存在すると仮定されている。古典的な塑性理論では yield function と plastic potential function とは同一と仮定されていたが、土に対しては一般に同一でないことが示されている。この函数は次式で表される。

$$g = g(\sigma)$$

- (3) Flow Rule Normality rule といわれる法則にしたがって、塑性ひずみは次式で与えられる。

$$d\epsilon^p = \lambda \cdot \left\{ \partial g / \partial \sigma \right\}$$

ここに λ は定数であり、 $\left\{ \partial g / \partial \sigma \right\}$ は plastic potential function に対して外側に垂直方向を定義している。

- (4) 弾性および塑性ひずみの増分 微小変位中の全ひずみ、 $d\epsilon$ と弾性ひずみ、 $d\epsilon^e$ 、および塑性ひずみ、 $d\epsilon^p$ 、の関係は次式で与えられるものと仮定する。

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

- (5) 応力の増分と弾性ひずみの増分の関係 応力の増分は次式で与えられると仮定する。

$$d\sigma = \underline{C}^e \cdot d\epsilon^e$$

$\underline{C}^e$ は対称形の材料弾性マトリックスである。

以上の5式を用いて、弾塑性の応力の増分とひずみの増分との関係式は次式で与えられる。

$$d\sigma = \underline{C}^{ep} d\epsilon = \left[\underline{C}^e - \frac{\underline{C}^e \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \cdot \underline{C}^e}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \cdot \underline{C}^e \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} \right)^T \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)} \right] \cdot d\epsilon$$

フックの法則が弾性有限要素解析で用いられると同じように、この $\underline{C}^{ep}$ が弾塑性有限要素解析に用いられる。この弾塑性応力-ひずみ関係式、 $\underline{C}^{ep}$ 、はつぎの性質をもっている。

- (1) もし函数 f と g が同一でない場合は $\underline{C}^{ep}$ は対称でない。
 (2) $\underline{C}^{ep}$ は現在の応力状態に依存するので、弾塑性解析で求められたひずみは応力の変化の大きさと現在の応力状態の両者に依存する。
 (3) $\underline{C}^{ep}$ の逆マトリックスでは、せん断応力と垂直ひずみを関係づける項が 0 であり、従ってグイレイタージュを有する土の性質を表わすことができる。

Lade の理論を用いた砂質土に対する応力ひずみ関係

Lade は種々の砂質土に対する実験を行って、yield function が次式で表わされることを示した。

$$f(\sigma, \epsilon^p) = K - K_t - W^p / (a + b W^p) = 0$$

ここに $K = I_1^3 / I_3$ 、 K_t は I_1^3 / I_3 の初期値、 W^p は全塑性仕事、 a と b は W^p と I_1^3 / I_3 の関係式を表わすために用い

られている双曲線関数に含まれる定数である。

Ladeの理論に用いられている, plastic potential functionは次式で表わすことができる。

$$g = (I_1^3 - K_3 I_3) / I_3$$

ここに $K_3 = (2A_1 - 1)(I_1^3 / I_3) + 2A_2$ であり, A_1 と A_2 は定数である。この plastic potential surface の形は、三次元応力空間において、図-1に示すように非対称な弾丸形をしている。

Ladeの理論では砂質土は Isotropic work-hardening の物質と仮定され、さらに ϵ^e に含まれるポアソン比は0であると仮定されている。従って砂質土に対する ϵ^{ep} は、

$$\epsilon^{ep} = \begin{bmatrix} E - CF_1q_1 & -CF_2q_1 & -CF_3q_1 & -CF_4q_1 & -CF_5q_1 & -CF_6q_1 \\ -CF_1q_2 & E - CF_2q_2 & -CF_3q_2 & -CF_4q_2 & -CF_5q_2 & -CF_6q_2 \\ -CF_1q_3 & -CF_2q_3 & E - CF_3q_3 & -CF_4q_3 & -CF_5q_3 & -CF_6q_3 \\ -CF_1q_4 & -CF_2q_4 & -CF_3q_4 & E - CF_4q_4 & -CF_5q_4 & -CF_6q_4 \\ -CF_1q_5 & -CF_2q_5 & -CF_3q_5 & -CF_4q_5 & E - CF_5q_5 & -CF_6q_5 \\ -CF_1q_6 & -CF_2q_6 & -CF_3q_6 & -CF_4q_6 & -CF_5q_6 & E - CF_6q_6 \end{bmatrix}$$

ここに、 $\{F_i\} = \{\partial f / \partial \sigma_i\}$, $\{q_i\} = \{\partial g / \partial \sigma_i\}$,

E は弾性係数, C は定数である。

計算例

上述した応力-ひずみ関係を用いて、二次元および三次元有限要素プログラムを用いて、Stress-path 試験と Torsion-shear 試験の解析した結果を報告する。

Stress-Path 試験 図-2に示す stress-path 試験は同じ初期応力状態から、異なった経路を通して再び同じ最終応力状態に応力が変化した場合の実験結果と解析結果が比較されている。この図で点Aの応力状態から点Bの応力状態に変化するときの土の挙動は特に興味深い。すなわちたとえ等方圧, σ_3 , が減少しても、Stress level $K = I_1^3 / I_3$ が増加するにしたがって、 σ_1 -方向に圧縮塑性ひずみが生ずる。この挙動は非線形弾性解析では計算することができない。

Torsion-Shear の試験 図-3に示す関係は Lade によって行われた torsion shear 試験を解析した結果の一例である。大きい stress level ではひずみの増分方向は応力方向に一致している。したがって塑性ひずみの挙動を示している。この挙動はフックの法則を用いた非線形弾性解析では説明することができない。

弾塑性有限要素解析の結果を報告した。塑性変形を考慮したこの種の解析が有限要素法の改良につながるものと考えられる。

最後にではあるが、筆者が米国においてこの研究を行なうにあたり種々御指導下さった、カリフォルニア大学 J. M. Duncan 教授に感謝の意を表す次第である。

参考文献

- Lade P.V., "The Stress-Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soils", Thesis Presented to U.C. Berkeley for Ph.D., 1972.
 Ozawa, Y., "Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Soil Deformation", Thesis Presented to U.C. Berkeley for Ph.D., 1973.
 Duncan J.M. and Chang C.-Y., "Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils", JSMFD, ASCE, Vol. 96, SM.5, 1970.
 Kulhawy, et. al., "Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Embankment During Construction" Report TE 69-4 U.C. Berkeley.

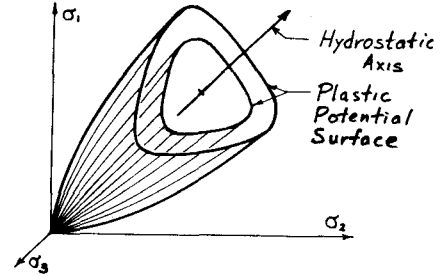


図-1 Plastic Potential Surface

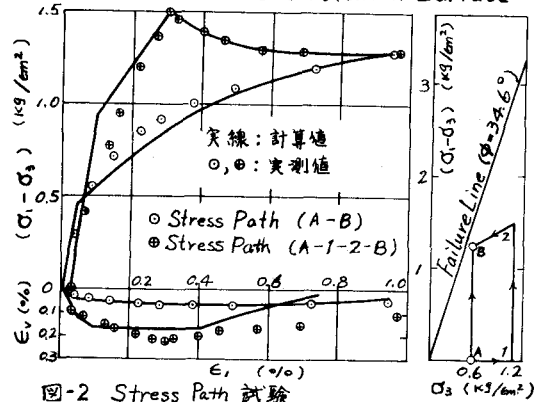


図-2 Stress Path 試験

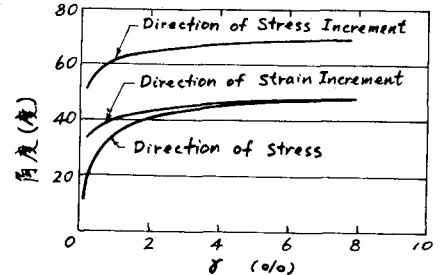


図-3 応力増分, ひずみ増分, 応力方向