III-27　土の応力－ひずみ関係の一般表示について

京都大学防災研究所　正員　松岡　元

すでに，提案している土の応力－ひずみ関係式[1]にもとづき，その応力－ひずみ特性を土の弾性係数（ヤング率 E，ポアソン比 ν）をパラメターとして表現することによって，FEMによる地盤や土構造物の変形解析を行なっている。[2] ここでは，より一般的にFEMに利用できるように，上述の主応力面上の応力－ひずみ関係式を任意面上の応力－ひずみ関係に変換して一般表示することを試みる。また，大きな誤差なく土の応力－ひずみ関係を簡略化して表示する方法について述べる。

1. 主応力面上の応力－ひずみ関係式

一般に相異なる3主応力下のダイレイタンシーによる主ひずみと主応力の関係は，モービライズド面上の応力－ひずみ間の基本関係式より，次式によって表わされる。[1]

$$(\epsilon_1)_d = f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\right),\quad (\epsilon_2)_d = f\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}\right) + g\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\right),\quad (\epsilon_3)_d = g\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + g\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}\right) \quad \text{---------(1)}$$

ここに，$X \equiv \sqrt{\sigma_i'/\sigma_j'} - \sqrt{\sigma_j'/\sigma_i'}$　$(i, j = 1, 2, 3,\ i \leqq j)$ として，

$$f\left(\frac{\sigma_i'}{\sigma_j'}\right) = \frac{\gamma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu}{\mu'-\mu}\right)}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu'-\mu)}\right\} \cdot \left\{\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\mu'-\mu}{2}\right) \cdot X + (\mu'-\mu)^2 - (\mu'-\mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} + 1\right\} \quad (i<j)$$

$$g\left(\frac{\sigma_i'}{\sigma_j'}\right) = \frac{\gamma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu}{\mu'-\mu}\right)}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu'-\mu)}\right\} \cdot \left\{-\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu'-\mu}{2}\right) \cdot X - (\mu'-\mu)^2 - (\mu'-\mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} - 1\right\} \quad (i<j)$$

$$f\left(\frac{\sigma_i'}{\sigma_i'}\right) = g\left(\frac{\sigma_i'}{\sigma_i'}\right) = 0 \qquad (i=j)$$

平面ひずみ条件においては次の近似式が成立する。

$$(\epsilon_1)_d = f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\right) \cong f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right),\quad (\epsilon_3)_d = g\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + g\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}\right) \cong g\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) \quad \text{------------(2)}$$

上式において σ_1'/σ_2'，σ_2'/σ_3' の値は高々2程度までの場合が多いので，近似等号が成り立つものと考えられる。

次に圧密による体積ひずみは周知のように次式で表わされる。

$$(\epsilon_v)_c = (\epsilon_1)_c + (\epsilon_2)_c + (\epsilon_3)_c = \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'} \quad \text{----------------------(3)}$$

ここに，C_c は圧縮指数，e_i，σ_{mi}' はそれぞれ圧密前の初期間げき比，初期平均有効主応力である。さて，等方応力状態（$\sigma_1'=\sigma_2'=\sigma_3'$）では上記体積ひずみ $(\epsilon_v)_c$ の各主ひずみ $(\epsilon_1)_c$，$(\epsilon_2)_c$，$(\epsilon_3)_c$ への分配は等しく 1/3 ずつであると考えられるが，相異なる3主応力が作用した場合には分配率は一般に異なるものと考えられる。ここでは，この分配率を空間モービライズド面（spatial mobilized plane）上の合応力の各主応力軸への成分値より各主応力のルートの割合と考えた。[3] この場合には，圧密による主ひずみは次式で表わされる。

$$(\epsilon_1)_c = \frac{\sqrt{\sigma_1'}}{\sqrt{\sigma_1'}+\sqrt{\sigma_2'}+\sqrt{\sigma_3'}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'},\quad (\epsilon_2)_c = \frac{\sqrt{\sigma_2'}}{\sqrt{\sigma_1'}+\sqrt{\sigma_2'}+\sqrt{\sigma_3'}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'},\quad (\epsilon_3)_c = \frac{\sqrt{\sigma_3'}}{\sqrt{\sigma_1'}+\sqrt{\sigma_2'}+\sqrt{\sigma_3'}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'} \quad \text{----(4)}$$

ここでダイレイタンシーによるひずみと圧密によるひずみの重ね合せを認めれば，平面ひずみ条件下では(2)，(4)式より応力－ひずみ関係式として次式を得る。

$$\epsilon_1 \cong f\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + \frac{\sqrt{\sigma_1'}}{\sqrt{\sigma_1'}+\sqrt{\sigma_2'}+\sqrt{\sigma_3'}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'},\quad \epsilon_3 \cong g\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) + \frac{\sqrt{\sigma_3'}}{\sqrt{\sigma_1'}+\sqrt{\sigma_2'}+\sqrt{\sigma_3'}} \cdot \frac{C_c}{1+e_i} \cdot \log_{10}\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mi}'} \quad \text{------(5)}$$

なお，実際の計算では便宜上 $\sigma_2' \cong (\sigma_1'+\sigma_3')/2$ とした。

2. 任意面上の応力－ひずみ関係式

まず簡単のため，現場においてよくみかける平面ひずみ条件下の２次元問題を取り扱う。さて，第1次近似として，主応力と主ひずみの方向が一致する（等方性）と仮定すれば，任意面でのひずみ ϵ_x，ϵ_y，γ_{xy} は次式で表わされる。

$$\epsilon_x=\frac{\epsilon_1+\epsilon_3}{2}+\frac{\epsilon_1-\epsilon_3}{2}\cdot\cos 2\alpha,\quad \epsilon_y=\frac{\epsilon_1+\epsilon_3}{2}-\frac{\epsilon_1-\epsilon_3}{2}\cdot\cos 2\alpha,\quad \gamma_{xy}=(\epsilon_1-\epsilon_3)\cdot\sin 2\alpha \quad \text{-----}(6)$$

ここに，$\cos 2\alpha=(\sigma_x'-\sigma_y')\Big/\left\{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right\}$，$\sin 2\alpha=\tau_{xy}\Big/\sqrt{\left(\frac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$

この(6)式へ(5)式を代入すれば，$\sigma_1'/\sigma_3'=\left\{\frac{\sigma_x'+\sigma_y'}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right\}\Big/\left\{\frac{\sigma_x'+\sigma_y'}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right\}$

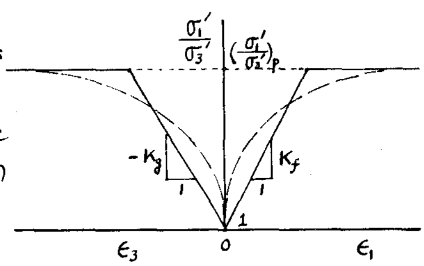
であり，σ_m' は不変量であるので，結局ひずみ ϵ_x，ϵ_y，γ_{xy} は応力 σ_x'，σ_y'，τ_{xy} の関数として表現される。したがって，次式右辺のマトリックスの各成分は σ_x'，σ_y'，τ_{xy} の関数として表わされることになる。

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\epsilon_x}{\partial\sigma_x'} & \frac{\partial\epsilon_x}{\partial\sigma_y'} & \frac{\partial\epsilon_x}{\partial\tau_{xy}} \\ \frac{\partial\epsilon_y}{\partial\sigma_x'} & \frac{\partial\epsilon_y}{\partial\sigma_y'} & \frac{\partial\epsilon_y}{\partial\tau_{xy}} \\ \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\sigma_x'} & \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\sigma_y'} & \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\tau_{xy}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d\sigma_x' \\ d\sigma_y' \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{----------------}(7)$$

コンピューターを用いれば，１つ前のステップでの応力値（σ_x'，σ_y'，τ_{xy}）を上式右辺のマトリックスへ入れることによって，任意面上の応力増分（$d\sigma_x'$，$d\sigma_y'$，$d\tau_{xy}$）とひずみ増分（$d\epsilon_x$，$d\epsilon_y$，$d\gamma_{xy}$）の間の関係を定めることができる。また逆マトリックスを求めれば，ひずみ増分から応力増分を計算することも可能となる。なお，(7)式右辺のマトリックスの各成分値の計算結果は紙面の都合で省略する。(7)式より，土材料の場合には応力増分とひずみ増分を結びつけるマトリックスの成分は定数とはならずに応力の関数になるのがわかる。

3. 簡略式の提案

(1)，(2)式の f関数，g関数が複雑な形をしているので，実際の現場への適用を考慮して出来るだけ簡略化することを試みる。(2)式を図示すれば右図における破線のカーブとなるが，これを２本の直線で置き換えると，ピーク時の主応力比 $(\sigma_1'/\sigma_3')_p$ までの部分について次式を得る。



$$(\epsilon_1)_d \cong K_f\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right),\quad (\epsilon_3)_d \cong -K_g\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right) \quad \text{--------}(8)$$

また相異なる３主応力下では (1)式に対応して次式を得る。

$$(\epsilon_1)_d=K_f\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right)+K_f\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}-1\right),\quad (\epsilon_2)_d=K_f\cdot\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}-1\right)-K_g\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}-1\right),\quad (\epsilon_3)_d=-K_g\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right)-K_g\cdot\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'}-1\right) \quad \text{-----}(9)$$

(8)，(9)式の K_f，K_g の値は，土の初期構造と応力状態を原位置にあわせて，例えば排水三軸圧縮（$\sigma_1' \geq \sigma_2'=\sigma_3'$）試験（厳密には σ_m' 一定）を行ない，(9)式からの $(\epsilon_1)_d=2K_f\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right)$，$(\epsilon_2)_d=(\epsilon_3)_d=-K_g\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right)$ なる関係より決定すればよい。この決定された K_f，K_g の値は，三軸圧縮，平面ひずみ，三軸伸張，多軸条件にかかわらず，その原位置の状態に対しては一定となるものと考えられる。

謝辞　本研究に対して有益な議論をいただいた京大・野中泰二郎助教授，関口秀雄助手，菅野安男氏，大阪土質試験所 橋本正氏，不動建設 謝明潔氏，および計算に御協力いただいた京大研修員 安部豊彦氏に謝意を表します。

参考文献　1) 松岡 元：3主応力下の土の応力－ひずみ関係について，京大防災研年報，第16号B，1973，pp.711-733.
2) 菅野・松岡：土の応力－ひずみ関係にもとづいた地盤の変形解析（第3報），第29回土木学会講演概要集，1974，第3部.
3) 松岡・中井：砂の応力比一定試験について，昭和49年度土木学会関西支部講演概要，1974，Ⅲ-4-1～2.