III-22 粒状体に関する等方硬化法則
―Rowe の提案式に基づく構成則―

九大・農 正員 ○橋口公一
東工大・工 正員 山口柏樹

粒状体の微視的変形解析に基づいて、種々の応力―歪増分特性式が提案されている。これらの特性式は構成粒子の相互スベリに着目して規定され、いずれも塑性変形に関するものであるとみなしうる。ところで、本来の目標は塑性構成則を規定することにあることはいうまでもないが、これらの提案された特性式からどのような塑性構成則が規定しうるかということについての検討は進められていない。本文では比較的簡潔に塑性構成則を導びきうる最小エネルギ比説に基づくRowe の提案式について述べるが、先きに示したように[1]、本式から不変量表示に導びかれる構成式は非常に複雑である。Coulomb・Mohr 則について示したように[2]、主成分で規定された関係式は不変量表示に変換すると特別な場合を除いて複雑となり、むしろ主成分表示のまゝ構成式を規定する方が理論式展開にさいしても得策であると思われる。したがって、以下では、Rowe 式から主成分表示において導びかれる塑性構成則を明らかにする。なお、現在、提案されているその他の提案式からは少なくとも簡潔な形式には塑性構成則を導びき得ないと思われる。これはRowe の提案式が直接、材料要素に作用する応力状態と歪増分状態の間に成り立つ関係を簡潔に規定しているのに対して、他の提案式は材料内部の特殊な面上の応力と歪増分の関係を規定していることによると思われる。

さて、Rowe は軸対称状態に対して

軸対称伸張状態 ：$-2\sigma_l d\varepsilon_l/\sigma_a d\varepsilon_a=K$， 軸対称圧縮状態：$-\sigma_a d\varepsilon_a/2\sigma_l d\varepsilon_l=K$， (1)

を提案しているが、先きに述べたように、軸歪増分 $d\varepsilon_a$ および側方歪増分 $d\varepsilon_l$ はいづれも塑性歪増分であるとみなしうる。式(1)において、σ_a および σ_l は軸圧および側圧であり、また、K は ϕ_μ を粒子間マサツ角として $K=\tan^2(\pi/4+\phi_\mu/2)$ で与えられる。

材料の等方性を仮定し、さらにDrucker の条件により負荷関数を塑性ポテンシャルとすれば、先きに明らかにした軸対称状態における負荷応力関数[1),3)]を考慮して、式(1)に従う塑性条件式は中間主応力の影響無視のもとに主応力表示で

$$(-\sigma_j)^K/\sigma_i+F^{K-1}=0, \tag{2}$$

で与えられる。ここに、$i, j=1, 2, 3$ として σ_1, σ_2 および σ_3 は3主応力である。F は硬化関数であるが、以下で具体形を与える。なお、Haythornthwaite, smith さらにBarden & Khayatt は式(1)を満たす塑性ポテンシャル関数として $-(-\sigma_3)^K/\sigma_1$ ($\sigma_1>\sigma_3$) を提案しているが、その導出過程は公表されていないので、理論的必然性に基づいて導びかれたのか、あるいは式(1)を満たす1関数として偶然に見い出されたのか知りえない。

式(2)に基づく負荷面は図―1のように示される。同図(b)は平均応力 P 軸を含む軸対称応力状態の負荷面形状を示す。また、(a)および(c)には P 一定面による切口形状を示すが、直線ではなく僅ずかながら外に向って凸面を呈する。なお、(b)にはRoscoe の指数関数負荷面およびBurland の楕円負荷面との比較の意味で、critical state における $r(=\sqrt{\sigma_1'^2+\sigma_2'^2+\sigma_3'^2}$；$\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ は主偏差応力）を一定にした条件でこれらの負荷面をも示しておいた。Roscoe 等による負荷面は軸対称であり、また、等方塑性圧縮状態における平均応力 P_i とcritical state における平均応力 P_c の比は不変であるのに対し、式(2)による負荷面では、critical state surface $\sigma_j/\sigma_i=K$ はCoulomb・Mohr形式であり、かつ、P_c/P_i は K 値により変化する。

さて、式(2)にNormality Condition を用い、等方性の仮定に留意すれば、主塑性歪増分 $d\varepsilon_1^p$, $d\varepsilon_2^p$

および $d\varepsilon_3^p$ は塑性体積歪増分 dv^p をパラメータとして、図−1の例えば区間 AC' ($\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3$) に対して次のように与えられる。

a) 面 OAPC' 上, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$d\varepsilon_1^p = -\frac{\sigma_3}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p, \quad d\varepsilon_2^p = 0, \quad d\varepsilon_3^p = \frac{K\sigma_1}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p \tag{3}$$

b) 稜 OAP 上 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ (軸対称伸張状態)

$$d\varepsilon_1^p = -\frac{\sigma_3}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p, \quad d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = \frac{K}{2} \cdot \frac{\sigma_1}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p \tag{4}$$

c) 稜 OC'P 上 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ (軸対称圧縮状態)

$$d\varepsilon_1^p = d\varepsilon_2^p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_3}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p, \quad d\varepsilon_3^p = \frac{K\sigma_1}{K\sigma_1 - \sigma_3} dv^p \tag{5}$$

d) 尖点 P または O, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (等方応力状態)

$$d\varepsilon_1^p = d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = dv^p/3, \tag{6}$$

なお、式(3)〜(5)は、式(1)のより一般な形として、Horne により示された次式を満たすことがわかる。

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon_1^p > 0,\ d\varepsilon_2^p < 0,\ d\varepsilon_3^p < 0 \text{ に対して } -(\sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p)/\sigma_1 d\varepsilon_1^p = K, \\ &d\varepsilon_1^p > 0,\ d\varepsilon_2^p > 0,\ d\varepsilon_3^p < 0 \text{ に対して } -\sigma_3 d\varepsilon_3^p/(\sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p) = K, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

いま、粒状体は塑性的な体積歪により硬化が進展する、すなわち硬化関数 F は v^p の関数であると仮定する。したがって、$F(v^p)$ は等方圧密特性などから決めうるが、1例として $V-\ln|P|$ 線型関型 (V: 体積比) を採用すれば、

$$F(v^p) = \mathcal{F}_0' \exp[V_0\{1 - \exp(v^p)/(\lambda - \kappa)\}] \tag{8}$$

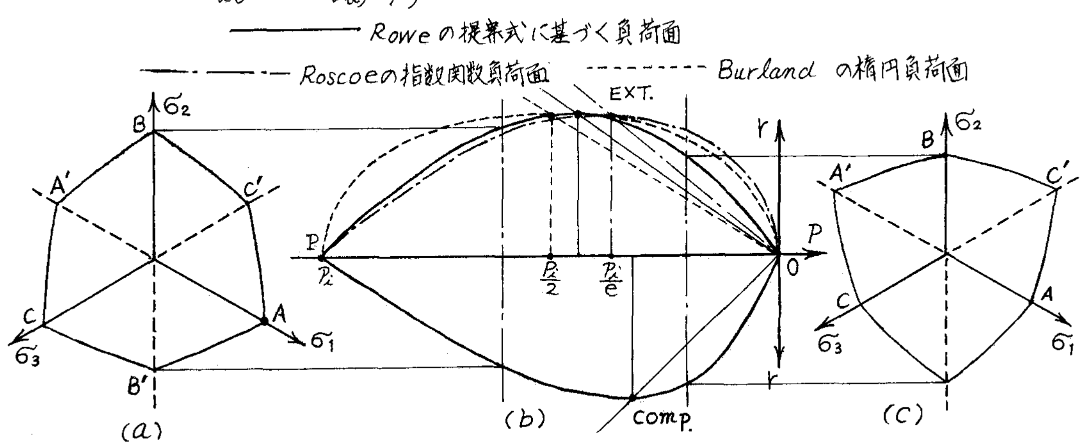
$$dv^p = -(\lambda - \kappa)(d\mathcal{F}'/\mathcal{F}) / \{V_0 - (\lambda - \kappa)\ln(\mathcal{F}'/\mathcal{F}_0')\} \tag{9}$$

であり、式(8)を式(3)〜(6)に用いれば、応力およびその増分に対して主塑性歪増分を具体的に求めうる。上式において、$\mathcal{F}' = \{(-\sigma_j)^K/(-\sigma_i)\}^{\frac{1}{K-1}}$ であり、$\mathcal{F}_0'$ は初期降伏時の $\mathcal{F}'$ 値である。また、V_0 は初期体積比であり、λ および κ は材料定数である。なお、以上の $V-\ln|P|$ 線型関係の式りにより簡潔な

$$F(v^p) = \mathcal{F}_0' \exp(-v^p/\alpha), \quad \alpha: \text{材料定数} \tag{10}$$

を採用すれば、dv^p は次式で与えられる[4]。

$$dv^p = -\alpha d\mathcal{F}'/\mathcal{F}' \tag{11}$$



図−1 Roweの提案式に基づく負荷面形状

参考文献 1) 樋口: 第28回土木学会講演集, 昭48, 2) 樋口: 土木学会論文報告集, 昭47, 199号
3) 山口, 樋口: 第9回土質工学会講演集, 昭49. 4) 樋口: 土木学会論文報告集, 昭49, 227号