

九州大学工学部 正会員 橋本 武
九州大学工学部 学生員 〇橋 嘉得
九州大学工学部 学生員 松隈 宣明

1. まえがき

トンネル湧水には初期集中湧水と恒常湧水に分けられる2つの問題がある。恒常湧水について水文学的な立場から予測する試みがあるが実際に用いられている。然しながら、施工上の観念にたてば初期集中湧水の予測がより重要な問題であることは周知のとおりである。そこで本研究ではこの問題にFEMの適用を試み、その数値的な把握を行なうとするものである。

2. 基本式

非定常状態の浸透流に関する基本式は既に文献(1)によって明らかである、従ってここでは本研究に関連する事項について簡単に書き留めることにする。非圧縮粘性流体に関するNavier Stokesの方程式から非等方性体内の運動方程式が次のようにえられる。

$$\begin{aligned} r \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial x} (g^2/2) + \beta_x g \frac{\partial u}{\partial x} + r g \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ r \frac{\partial v}{\partial t} + \beta_y \frac{\partial}{\partial y} (g^2/2) + \beta_y g \frac{\partial v}{\partial y} + r g \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ r \frac{\partial w}{\partial t} + \beta_z \frac{\partial}{\partial z} (g^2/2) + \beta_z g \frac{\partial w}{\partial z} + r g \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに

 g : 流線方向の流速 r : 体積空けき率 u, v, w : x, y, z 方向の流速 β : 面積空けき率 h : 水頭

また連続方程式は

ここに

$$\beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_z \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho g (r\zeta + \xi) \quad (2)$$

 ζ : 浸透水の圧縮率 ξ : 透水路の圧縮率

式(1),(2)に対してHamiltonの原理と同様の原理を適用すれば次式が得られる

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V \left\{ r \frac{\partial}{\partial t} (su) + \beta_x g \frac{\partial}{\partial x} (sh) + r g \left(s \frac{\partial u}{\partial x} + s \frac{\partial v}{\partial x} + s \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} u + \left\{ r \frac{\partial}{\partial t} (sv) + \beta_y g \frac{\partial}{\partial y} (sh) + r g \left(s \frac{\partial u}{\partial y} + s \frac{\partial v}{\partial y} + s \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} v + \left\{ r \frac{\partial}{\partial t} (sw) + \beta_z g \frac{\partial}{\partial z} (sh) + r g \left(s \frac{\partial u}{\partial z} + s \frac{\partial v}{\partial z} + s \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} w \times dx dy dz = 0 \quad (3)$$

浸透面上では

$$\left\{ \beta_x u \cos(n, x) + \beta_y v \cos(n, y) + \beta_z w \cos(n, z) \right\} sh = \frac{\pm r sh \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}}$$

が成立するから

$$\begin{aligned} -r \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial t} su + \frac{\partial}{\partial t} sv + \frac{\partial}{\partial t} sw \right) dx dy dz + g \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_S \left[\beta_x u \cos(n, x) + \beta_y v \cos(n, y) + \beta_z w \cos(n, z) \right] sh ds + \\ g \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_F \frac{\pm r sh \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}} ds + \rho g^2 (\zeta r + \xi) \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_V sh \frac{\partial}{\partial t} dx dy dz + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V r g \left[\left(\frac{u}{h_{11}} + \frac{v}{h_{12}} + \frac{w}{h_{13}} \right) su + \right. \\ \left. + \left(\frac{u}{h_{21}} + \frac{v}{h_{22}} + \frac{w}{h_{23}} \right) sv + \left(\frac{u}{h_{31}} + \frac{v}{h_{32}} + \frac{w}{h_{33}} \right) sw \right] dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

いま、三角形要素寸長を考慮、その頂点 i, j, k の座標をそれぞれ $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ とする、また各項英の水頭 H が次式で表わされるものと仮定する。

$$\begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad \text{すなわち } H = A\alpha \quad \text{ここに}$$

ここに

 α : 未定定数マトリックス

以上の式を(4)式に代入して

$$\begin{aligned} Q &= KH + P \frac{\partial}{\partial t} + F \frac{\partial}{\partial t} \\ P &= -\frac{25}{9} A^T D^T C^{-1} \end{aligned} \quad \begin{aligned} K &= -\frac{5}{r} [A^T]^T D^T C^{-1} D A^T \\ F &= -\rho g (\zeta r + \xi) S [A^T]^T E A^T \end{aligned} \quad (5)$$

ここに

$$A^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ -x_j + x_k & -x_k + x_i & -x_i + x_j \\ x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \{ y_i (x_k - x_j) + y_j (x_i - x_k) + y_k (x_j - x_i) \}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_i x_j + x_j x_k + x_k x_i) & \frac{1}{2} (x_i + x_j + x_k) (y_i + y_j + y_k) + x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k & \frac{1}{3} (x_i + x_j + x_k) \\ \frac{1}{2} (x_i + x_j + x_k) (y_i + y_j + y_k) + x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k & \frac{1}{6} (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2 + y_i y_j + y_j y_k + y_k y_i) & \frac{1}{3} (y_i + y_j + y_k) \\ \frac{1}{3} (x_i + x_j + x_k) & \frac{1}{3} (y_i + y_j + y_k) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_{x1}} & \frac{1}{k_{x2}} \\ \frac{1}{k_{x2}} & \frac{1}{k_{x2}} \end{bmatrix} = C \quad \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 \end{bmatrix} = D \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix} = Q$$

3 適用例

式(5)において $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ の項を無視すれば恒常湧水に対する基本式がえられる。本理論の妥当性を吟味する為、まずはこの定常状態にある地下水の解析を試みた。既に、図-1に示すようにトンネル断面が理想的な不透水層から潜水層に接し、恒常状態になった場合について本法を適用すれば表の1の(a)に示すことと結果をうる。その等ポテンシャル線は図-2のごとくなる。

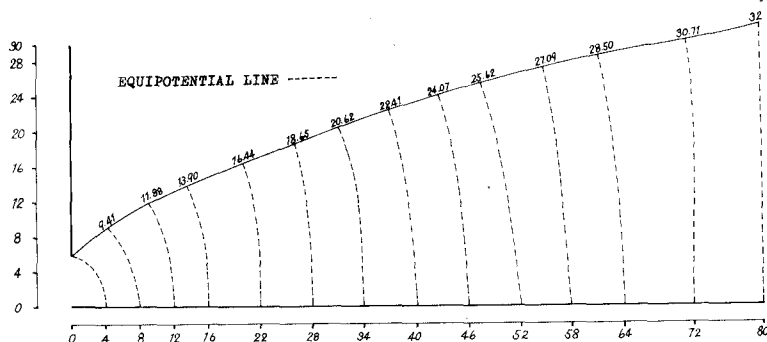
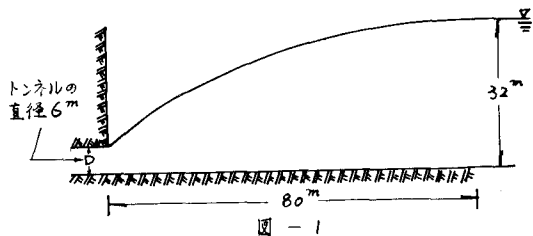


表-1 (単位: m)

水 平 座 標	4	8	12	16	22	28	34	40	46	52	58	64	72	80
(a) 本 法	8.38	11.22	13.67	15.31	17.47	19.58	21.62	23.23	24.87	26.35	27.79	29.07	30.71	32.00
(b) Casagrande 法	9.34	11.68	13.63	15.33	17.58	19.57	21.37	23.04	24.59	26.05	27.43	28.75	30.41	31.99

他方、本例に対してCasagrandeの方法により水位を求めれば表-1の(b)に示すとおりで両者が十分な精度で合致していることがわかり、本法のトンネル湧水問題への適用の可能性を数値的に知ることができる。

初期集中湧水の予測では $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ の項を無視することはできない。したがってその計算は一種の試算算法によりくり返し計算となる。 $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ の項を同時に考慮する場合にどの程度の演算労力を要するのか検討がつかないのでまずは個々の項についての検討を推進し、最終的に両者を考慮したトンネル湧水計算のためのプログラムを作成すべく努力しているところである。

参考文献

- (1) 飯田隆一、朝倉 肇：非定常浸透流の有限要素法による解析 土木研究所報告 No.142 号の1 1971
- (2) 吉識雅夫 監訳：マトリックス有限要素法 培風館
- (3) 駒田広也、川本眺万：基礎および堤体内における浸透流の解析について 第6回岩盤力学シンポジウム