II-218　固液系流動層の数学的モデル

九州大学工学部　正員　粟谷 陽一
〃　〃　○楠田 哲也

I. まえがき

干渉沈降、高速接触沈澱池のフロックブランケットおよび沪過池での逆洗は、水処理の分野において、それぞれの役割を有しているが、原理的には、すべて固液系流動層である. 固相は汚泥フロック、粘土フロック、砂粒であり、それぞれの粒子径を代表長さとするレイノルズ数に差があること，および、フロックは凝集性を有すること等に違いが見られる. これらの流動層についての実験は既に数多く行なわれ、経験的にはかなりのことが明らかにされている. しかしながら、これらの現象、つまり固液系流動層としての現象の解明は摂動法を用いる方法により、流動層は不安定であることを示している程度に留まっており、二次元あるいは三次元での有限振幅波を用いた流動層についての支配的な要因についての検討はほとんどなされていない。

本報告は固液系流動層の現象の解明の第一歩として流動層内での支配的要因について検討したものである。

II. 基本式

流動層の流動状態を厳密に解析するには、粒子近傍の流れを求めなければならない. しかしながら、これは非常に困難なので、以下の仮定を設ける.

(1) 粒子は局所的に均等に分布し、互いの衝突は無視できる.

(2) 速度，圧力は粒子径より大きな距離で変化する.

(3) 粒子に作用する応力は粒子濃度の関数と粒子と流体の平均相対速度の関数の積で決まる.

以上の仮定のもとで、粒子と流体の物質保存式と運動方程式は以下のようになる.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \nabla\cdot[(1-\varepsilon)\vec{v}] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot(\varepsilon\vec{u}) = 0 \qquad (2)$$

$$(1-\varepsilon)\rho_s\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -(1-\varepsilon)\nabla p - (1-\varepsilon)\rho_s g\vec{i} + \rho_f\varepsilon G(\varepsilon)(\vec{u}-\vec{v})|\vec{u}-\vec{v}|^{\ell} \qquad (3)$$

$$\varepsilon\rho_f\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right] = -\varepsilon\nabla p - \varepsilon\rho_f g\vec{i} - \rho_f\varepsilon G(\varepsilon)(\vec{u}-\vec{v})|\vec{u}-\vec{v}|^{\ell} + \mu_s\Delta\vec{u} \qquad (4)$$

	STOKES	ALLEN	NEWTON
$E(R_e)$	$18/Re$	$7.5/\sqrt{Re}$	0.255
ℓ	0	0.5	1
m	4.65	4.46	4.64

ただし、　$U_s^{\ell-1}\cdot D\cdot G(\varepsilon) = E(Re)\,\varepsilon^{-m}$　　(5)

$\vec{v}$, $\vec{u}$, ρ_s, ρ_f：粒子および流体の流速と密度，ε：空隙率，P：圧力，μ, μ_s：水および混相流の粘性係数，U_s：単粒子沈降速度，D：粒径，$\vec{i}$：鉛直上向き単位ベクトル，$Re = U_s D/\nu$，である.

上式にて，粒子の平均濃度$(1-\varepsilon_0)$における静水圧 P_0 を差引いて、以下の無次元数により無次元化すれば、

$$\vec{Q}_u = \frac{\varepsilon\vec{u}}{U_s},\quad \vec{Q}_v = \frac{(1-\varepsilon)\vec{v}}{U_s},\quad R = \frac{\rho_s}{\rho_f},\quad h = \frac{P-P_0}{\rho_f U_s^2},\quad Re = \frac{U_s D}{\nu},\quad E(R_e) = \frac{(R-1)gD}{U_s^2},\quad \tau = \frac{U_s t}{D},\quad \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{D}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - \nabla\cdot\vec{Q}_v = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \nabla\cdot\vec{Q}_u = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\vec{Q}_v}{\partial\tau} = -\frac{\vec{Q}_v}{1-\varepsilon}\nabla\cdot\vec{Q}_v - (\vec{Q}_v\cdot\nabla)\frac{\vec{Q}_v}{1-\varepsilon} + \frac{1}{R}\left[-(1-\varepsilon)\nabla h - (1-\varepsilon)\varepsilon_0 E(R_e)\vec{i} + E(R_e)\left\{(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right\}\left|(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right|^{\ell}\varepsilon^{-m}\{\varepsilon(1-\varepsilon)\}^{-\ell}\right] \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\vec{Q}_u}{\partial\tau} = -\frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{Q}_u - (\vec{Q}_u\cdot\nabla)\frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon} - \varepsilon\nabla h + (1-\varepsilon_0)\varepsilon E(R_e)\vec{i} - E(R_e)\left\{(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right\}\left|(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right|\varepsilon^{-m}\{\varepsilon(1-\varepsilon)\}^{-\ell} + \frac{1}{Re}\frac{\mu_s}{\mu}\Delta\frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon} \qquad (9)$$

圧力は、

$$(1-\varepsilon+\varepsilon R)\nabla^2 h + \nabla(1-\varepsilon+R\varepsilon)\cdot\nabla h = -R\nabla\cdot\left[\frac{\vec{Q}_v}{1-\varepsilon}\nabla\cdot\vec{Q}_v + (\vec{Q}_v\cdot\nabla)\frac{\vec{Q}_v}{1-\varepsilon} + \frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{Q}_u + (\vec{Q}_u\cdot\nabla)\frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon}\right]$$
$$+(\varepsilon_0+R-R\varepsilon_0)E(Re)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - (R-1)E(Re)\nabla\cdot\left[\left\{(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right\}\left|(1-\varepsilon)\vec{Q}_u - \varepsilon\vec{Q}_v\right|^{\ell}\varepsilon^{-m}\{\varepsilon(1-\varepsilon)\}^{-\ell}\right] + \frac{R}{Re}\nabla\cdot\left[\frac{\mu_s}{\mu}\Delta\frac{\vec{Q}_u}{\varepsilon}\right] \qquad (10)$$

となる

上式を差分化し，数値計算を行なえば，前述の仮定のもとでの流動状態の解を得る。一方，$\rho_s/\rho_f \doteqdot 1$ の場合の混相流では，粒子の加速度項や慣性項は流体のそれらにほぼ等しいことから，このような混相流においては，混相流全体は，淡塩水の密度流のごとくふるまい，固相と液相の相対運動は *steady state* として存在する一つまり粒子の加速度項は認めない一とすれば，次式を得る。ただし，鉛直方向の運動方程式中の $(\rho_s-\rho_f)/\rho_f$ は *motive force* なので省略しない。

$$\nabla\cdot\vec{Q}_q = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - \nabla\cdot\vec{Q}_v = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\vec{Q}_q}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi_i}(\vec{Q}_q Q_{qi}) = -\nabla p - (\varepsilon_0-\varepsilon)E(Re)\boldsymbol{i} + \frac{\mu_s}{\mu}\frac{1}{Re}\Delta\vec{Q}_q \qquad (13)$$

$$\nabla p + \varepsilon_0 E(Re)\boldsymbol{i} - \frac{E(Re)}{1-\varepsilon}\left[\left\{(1-\varepsilon)\vec{Q}_q - \vec{Q}_v\right\}\left|(1-\varepsilon)\vec{Q}_q - \vec{Q}_v\right|^{\ell}\varepsilon^{-m}\left\{\varepsilon(1-\varepsilon)\right\}^{-\ell}\right] = 0 \qquad (14)$$

圧力は $$\nabla^2 p = -\frac{\partial Q_{qi}}{\partial\xi_j}\frac{\partial Q_{qj}}{\partial\xi_i} - \frac{1}{Re}\nabla\left(\frac{\mu_s}{\mu}\right)\cdot\Delta\vec{Q}_q \qquad (15)$$

ただし， $$\vec{Q}_q = \vec{Q}_u + \vec{Q}_v \qquad (16)$$

上式は平均濃度（$1-\varepsilon_0$）における静水圧を差引いている。

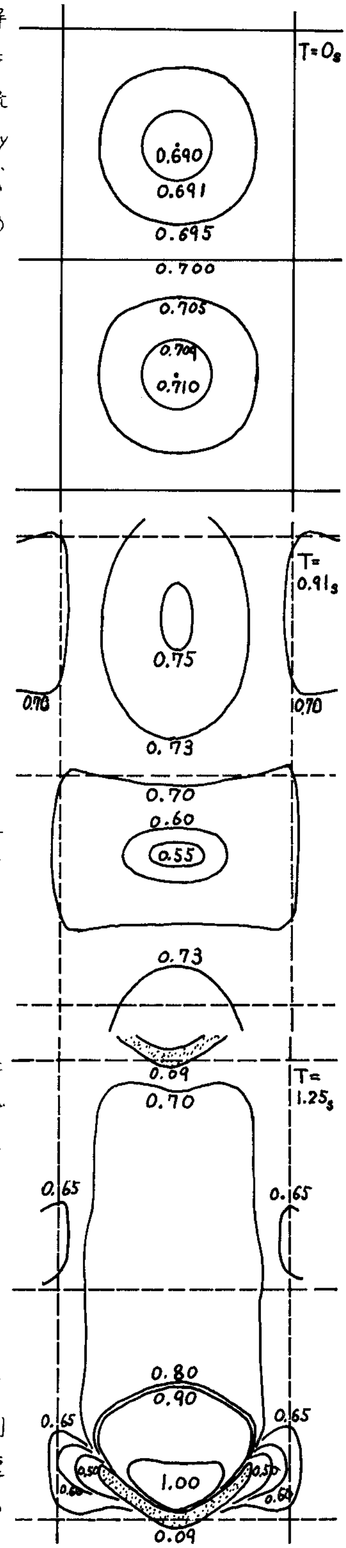
Ⅲ 計算結果と考察

上式は本来三次元で計算しなければならないが，計算機の容量の都合上，二次元として計算した。差分化の際には保存形となるようにし，$\Delta t \leq \Delta x/|u|$（$\Delta\tau \leq \Delta\xi$），$\Delta t < \Delta x^2/8\nu$（$\Delta\tau < \Delta\xi^2\cdot Re/8$）の安定性の条件は充分満足するように，$\Delta\tau$, $\Delta\xi$ を定めた。さらに，圧力 p や ΔQ_q（$=-\nabla\times\vec{\omega}$）を計算する際には物質保存に留意した。近似式（11）～（15）を用いて計算した例を右に示す。初期の濃度分布は，平均空隙率を 0.7 として

$$\varepsilon = 0.70 + 0.01\sin(2\pi x/L)\sin(2\pi y/L)$$

とし，市松模様に濃度を分布させた。

時間経過とともに濃度 fructuation が増大することが分る。この増大速度は ε の小なる方が大なる方より大きい。これは現象の非線形性に基づくものである。粒子の高濃度部分は発達と同時に水平方向にも拡がりながら，遂には互に密接した状態に至る。二次元の場合 $\varepsilon_{cri} = 0.093$ となる。図例の $Re = 1.0$ の場合，この粒子が互に密接した状態に達するに要する時間は 1.1 秒（間隔 8.5 cm）であり，他の例の $Re = 10$ の場合には，1.9 秒（間隔 19.9 cm）となっている。この時間経過程度では，粒子が密に詰った部分の上方には水ばかり（$\varepsilon = 1.00$）の部分が生じ始めているが，この部分の下方には，ほゞ平均濃度の部分が存在する。さらに時間が経過すると，水ばかりの部分と粒子が密に詰った部分が多層に重なって存在し始める。この様子は実際の流動層での観測と一致している。したがって，$\rho_s/\rho_f \doteqdot 1$ の場合には，混相流としての加速度は認めるが，各相間は定常的な運動のみとする考え方は矛盾ないと考えられる。今後，Re 数が大きい場合あるいは凝集性の効果等についても検討していきたい。



$Re = 1.0$, $\Delta\tau = 0.2$, $U_s = 0.38$ cm/s, $D = 0.0264$ cm, $\Delta\xi = 10$