II-189　流れを伴う拡散現象の2，3次元有限要素法解析

京都大学　学生員　○二神　種弘

1. はじめに

温排水汚染，水質汚濁，大気汚染等の環境問題に関係して拡散現象解析の要求が日増しに高まり，有限要素法を用いた解析がいろいろとおこなわれてきている[1),5)]。しかしながら，流れを伴う（速度項を含む）有限要素法解析のRitzの方法（汎関数の最小化の方法）による解析例は，我が国水理関係分野で十分発表されていないと思われる。したがって，本研究は，有限要素法により流れを伴う拡散現象解析をRitzの方法でおこなったものである。なお考えられる2種類の汎関数をもとに解析し，両者の解析結果を検討中である。

2. 基礎偏微分方程式

2，3次元拡散現象を表わす基礎偏微分方程式は，次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2,3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} D_{x_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) - K\phi + q \qquad (1)$$

ただし，

ϕ；状態変数（温度，濃度など），t；時間，x_k；座標

D_{x_k}；拡散係数，v_k；速度，K；減衰要素，q；発生負荷

ここで，次の変換をおこなうと（1）式のかわりに（5）式がえられる。

$$\varphi = \phi \exp(\beta/2) \qquad (2)$$

$$Q = q \exp(\beta/2) \qquad (3)$$

$$\beta = -\sum_{k=1}^{2,3} x_k v_k / D_{x_k} \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{2,3}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} D_{x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{v_k^2}{4D_{x_k}}\varphi\right) - K\varphi + Q - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

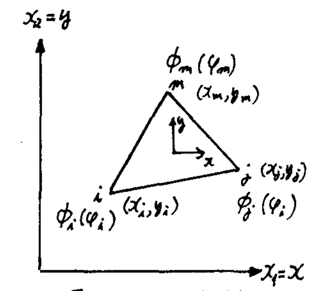

図1．2次元解析

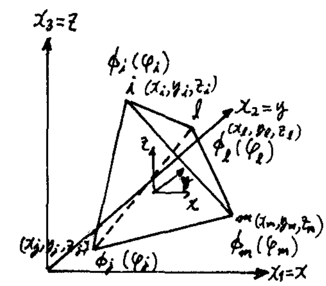

図2．3次元解析

3. Ritzの方法による有限要素法化

（5）式と等価な最小化すべき汎関数として，次の2種類がえられている[2),3)]。

$$\chi^1 = \int_{V \text{ or } (\Delta)} f^1 \, dV \,(\text{or } d\Delta) = \int_{V \text{ or } (\Delta)} \left[\sum_{k=1}^{2,3}\frac{D_{x_k}}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{v_k}{2D_{x_k}}\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q + \frac{K\varphi}{2}\right)\varphi\right] dV \,(\text{or } d\Delta) \qquad (6-1)$$

$$\chi^2 = \int_{V \text{ or } (\Delta)} f^2 \, dV \,(\text{or } d\Delta) = \int_{V \text{ or } (\Delta)} \left[\sum_{k=1}^{2,3}\left\{\frac{D_{x_k}}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{v_k^2}{8D_{x_k}}\varphi^2\right\} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q + \frac{K\varphi}{2}\right)\varphi\right] dV \,(\text{or } d\Delta) \qquad (6-2)$$

ここで，1次の形状関数

$$\{\varphi\} = [N]\{\varphi\}^e, \quad N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \quad \text{or} \quad N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V$$

を用い，（6−1），（6−2）を最小化（$\partial \chi / \partial \varphi_i \to 0$）すると，次のマトリックス表示を得る。

$$[h]\{\varphi\}^e = \{F\}^e \qquad (7)$$

ただし，$\{F\}^e$は等価節点負荷量であり，$[h]$は3×3（2次元），4×4（3次元）のマトリックスであり，マトリックスの各要素は次式で与えられる。

2次元解析

$$
\begin{cases}
h^1_{rs} = \left[(D_x b_r b_s + D_y c_r c_s) + 2\left(\frac{u^2}{8D_x} + \frac{v^2}{8D_y} + \frac{K}{2} \right) \left\{ a_r a_s + (b_r b_s XX + (b_r c_s + b_s c_r) XY + c_r c_s YY)/12 \right\} \right] / 4\Delta & (8\text{-}1) \\
\text{or} \\
h^2_{rs} = h^1_{rs} + \left\{ \frac{u}{2}(b_r a_s + b_s a_r) + \frac{v}{2}(c_r a_s + c_s a_r) \right\} / 4\Delta & (8\text{-}2)
\end{cases}
$$

3次元解析

$$
\begin{cases}
h^1_{rs} = \left[(D_x b_r b_s + D_y c_r c_s + D_z d_r d_s) + 2\left(\frac{u^2}{8D_x} + \frac{v^2}{8D_y} + \frac{w^2}{8D_z} + \frac{K}{2} \right) \left\{ a_r a_s + (b_r b_s XX + c_r c_s YY + d_r d_s ZZ \right.\right. \\
\quad \left.\left. + (b_r c_s + b_s c_r) XY + (c_r d_s + c_s d_r) YZ + (d_r b_s + d_s b_r) ZX)/20 \right\} \right] / 36V & (9\text{-}1) \\
\text{or} \\
h^2_{rs} = h^1_{rs} + \left\{ \frac{u}{2}(b_r a_s + b_s a_r) + \frac{v}{2}(c_r a_s + c_s a_r) + \frac{w}{2}(d_r a_s + d_s a_r) \right\} / 36V & (9\text{-}2)
\end{cases}
$$

ただし，$XX = \sum_{i=i}^{m,l} x_i^2$, $YY = \sum_{i=i}^{m,l} y_i^2$, $ZZ = \sum_{i=i}^{m,l} z_i^2$, $XY = \sum_{i=i}^{m,l} x_i y_i$, $YZ = \sum_{i=i}^{m,l} y_i z_i$, $ZX = \sum_{i=i}^{m,l} z_i x_i$

4．解析例

図3に示す形状，速度分布，拡散係数を有する解析対象断面に対して，表1の境界条件で熱拡散の計算をしてみた。

表1. 境界条件

NO	拘束境界条件
NO.1.	$\phi_1 = \phi_2 = \phi_{11} = \phi_{20} = \phi_{29} = \phi_{38} = 60°C$ $\phi_{10} = \phi_{19} = \phi_{28} = \phi_{37} = \phi_{46} = 20°C$
NO.2.	$\phi_1 = 100°C$ $\phi_{10} = \phi_{19} = \phi_{28} = \phi_{37} = \phi_{46} = 20°C$

計算結果を図4，図5に示す。節点速度は$\sqrt{v^2 + u^2} = 0.96/r$で与えて計算した。($r$; 原点からの距離)

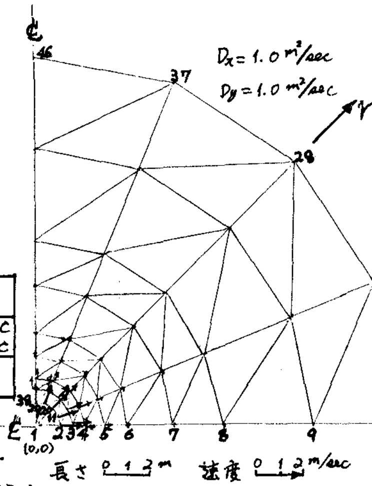

図3　解析対象断面

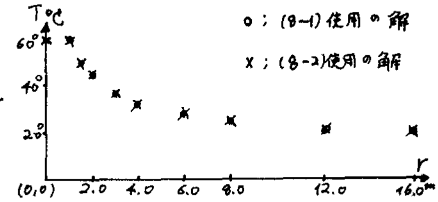

図4. NO.1 計算結果

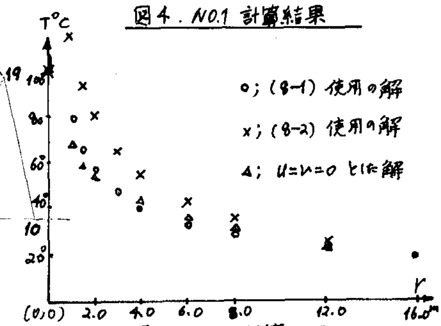

図5. NO 2. 計算結果

5．あとがき

紙数の都合上，十分な解析例を示すことができないので，講演時にスライドあるいはかけ図で，いろいろな拡散現象解析例を示す予定である。なお本研究のため東京大学，京都大学の両大型計算センターを利用している。最後に研究御指導下さっている京都大学，大阪大学教授末石富太郎博士に心から感謝の意を表します。

6．参考文献

1）川原睦人，大坂一，見浦安治，自然熱対流の有限要素法による数値解析，第18回水理講演会講演集

2）G.L. Guymon, V.H. Scotl, & L.R. Herrmann, A General Numerical Solution of the Two-Dimensional Diffusion-Convection Equation by the Finite Element Method, Water Resources Recerch (December 1970)

3）I.M. Smith, R.V. Farraday, & B.A. O'Conner, Rayleigh-Ritz and Galerkin Finite Elements for Diffusion-Convection Problems, Water Resources Reserch (June 1973)

4）O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGRAW-Hill (1967)

5）T. Kawai, On the Finite Element Analysis of Diffusion Problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proceeding of the 1973 Tokyo Seminor on Finite Element Analysis, University of Tokyo Press

6）二神種弘，3・11 有限要素法，土木設計便覧，丸善，（1974）