II-186　　交番流中の移流拡散の理論と実験

東京工業大学　正員　福岡捷二

鉛直速度勾配が大きい交番流中に瞬間的に流入された物質の移流拡散を　二次元開水路流と円管流について理論的に解析し　実験によって調べた。

理論式　x 軸を主流に平行，y 軸を主流に直角，z 軸を鉛直上向きに選ぶ。y 方向の物理量の変化が無視でき，水深 H が一定な交番流を考える。その時　移流－拡散方程式，初期条件，境界条件を次式で与える。

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left[u_0(z)+u_t(z)\sin\omega t\right]\frac{\partial S}{\partial x}=K_x\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+K_z\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$S(0,x)=\frac{1}{H}\delta(x) \quad (2),\qquad \frac{\partial S}{\partial z}=0 \quad at\ z=0,H,\quad S\to 0,\ x\to\pm\infty \quad (3)$$

ここで　$u_0(z)$, $u_t(z)$ は定常流の流速と交番流の流速振巾である。本研究では　鉛直シアーの分散に及ぼす影響に関心があるので，濃度 S の詳細な分布を知るよりもむしろ S のモーメントを議論するほうがより適切である。(1)式にそれぞれ x, x^2 を乗じ，(2)，(3)式を用いてその結果を x, z, t に関して積分すると全拡散質に関する第一次，第二次モーメントに関する式を得る。

$$\overline{X}=\int_0^H\!\!\int_0^t (u_0+u_t\sin\omega t')\,m_0\,dz\,dt' \quad (4),\qquad \overline{X^2}=2K_xt+\int_0^H\!\!\int_0^t (u_0+u_t\sin\omega t')\,m_1\,dz\,dt' \quad (5)$$

ここに　m_0, m_1 に関する関係式は　次式で与えられる。

$$\frac{\partial m_0}{\partial t}=K_z\frac{\partial^2 m_0}{\partial z^2},\quad m_0(0,z)=\frac{1}{H},\quad \frac{\partial m_0}{\partial z}=0\ \ at\ z=0,H \quad (6)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t}-K_z\frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2}=(u_0+u_t\sin\omega t)\,m_0,\quad m_1(0,z)=0,\quad \frac{\partial m_1}{\partial z}=0\ \ at\ z=0,H \quad (7)$$

円管内交番流に対しても (1)～(7)式に対応する同等な関係式を得ることができる。移流拡散係数（分散係数）を (8)式で定義する。

$$D_x=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right) \quad (8)$$

交番流の速度分布形，渦拡散係数として図-1に示される5-Caseを考える。Case 1の分散係数は次式となる。

$$D_x=K_x+\frac{\overline{U}_0^2}{30}\frac{H^2}{K_z}+\frac{\overline{U}_t^2H^2}{K_z}\left\{\frac{Tr^2}{4\pi^2}\left(1+e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}}\cos\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}\right)+\frac{2Tr^2}{\pi^4}\frac{\left(1-e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}}\cos\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}\right)}{1+\frac{\pi^2}{4}Tr^2}\right.$$
$$\left.-\frac{Tr^3}{\pi^3}\frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}}\sin\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}}{1+\frac{\pi^2}{4}Tr^2}-\frac{Tr^{\frac{5}{2}}}{4\pi^{\frac{5}{2}}}\left[1-e^{-\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}}\left(\cos\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}-\sin\sqrt{\frac{\pi}{Tr}}\right)\right]\right\} \quad (9)$$

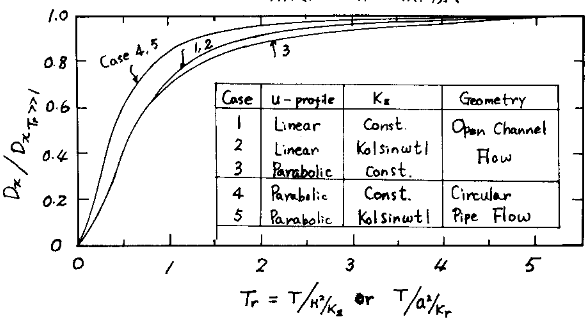
上式中　$\overline{U}_0$, $\overline{U}_t$ はそれぞれ定常流の断面平均流速と交番流の平均流速振巾である。Tr は　交番流の周期に対する断面内の濃度が一様になるに要する時間の比で　$Tr=T/H^2/K_z$　又は　$T/a^2/K_r$ で与えられる。(9)式中第1項は主流方向の乱流輸送係数，第2項は定常流の鉛直シアーと鉛直拡散係数の結合から生じた分散，第3項以下は交番流の分散である。他の4-Caseについても (9)式と類似の関係式を得ることができる。Tr の極限的な2つの場合（$Tr\gg 1$ or $Tr\ll 1$）に対する5-Caseの D_x の値を表-1に示す。ここに $K_m=\frac{1}{T}\int_0^T K_0|\sin\omega t|\,dt$。

表-1

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
$D_{x\,Tr\gg 1}$	$K_x+\frac{H^2}{K_z}\left(\frac{\overline{U}_s^2}{30}+\frac{\overline{U}_t^2}{60}\right)$	$K_x+\frac{H^2}{K_m}\frac{8}{\pi^2}\frac{\overline{U}_t^2}{60}$	$K_x+\frac{H^2}{K_z}\left(\frac{2\overline{U}_s^2}{105}+0.0098\overline{U}_t^2\right)$	$K_x+\frac{a^2}{K_r}\left(\frac{\overline{U}_s^2}{48}+\frac{\overline{U}_t^2}{96}\right)$	$K_x+\frac{a^2}{K_m}\frac{8}{\pi^2}\frac{\overline{U}_t^2}{96}$
$D_{x\,Tr\ll 1}$	$K_x+\frac{H^2}{K_z}\left[\frac{\overline{U}_s^2}{30}+\frac{\overline{U}_t^2}{4}\left(\frac{Tr}{\pi}\right)^2\right]$	$K_x+\frac{H^2}{K_m}\frac{2\overline{U}_t^2}{\pi^2}\left(\frac{Tr}{\pi}\right)^2$	$K_x+\frac{H^2}{K_z}\left[\frac{2\overline{U}_s^2}{105}+\frac{9\overline{U}_t^2}{16}\left(\frac{Tr}{\pi}\right)^2\right]$	$K_x+\frac{a^2}{K_r}\left[\frac{\overline{U}_s^2}{48}+\overline{U}_t^2\left(\frac{Tr}{\pi}\right)^2\right]$	$K_x+\frac{a^2}{K_m}\frac{8\overline{U}_t^2}{\pi^2}\left(\frac{Tr}{\pi}\right)^2$

図-1は $T_r>>1$ の場合の分散係数で無次元化した分散係数とT_rの関係を示す。図-1と表-1から次の点が明らかとなる。(a)無次元分散係数とT_rの関係は実質的に流速分布に無関係で 両者の間に1つの関数関係が成立する。Case 1, 2, 3 と 4, 5の違いは 断面形状の違いによる。(b)時間の周期関数で与えられる鉛直拡散係数をもつ流れの分散係数は それが一定と仮定した場合に比し $8/\pi^2$倍の大きさをもつ。

図-1 分散係数とT_rの関係

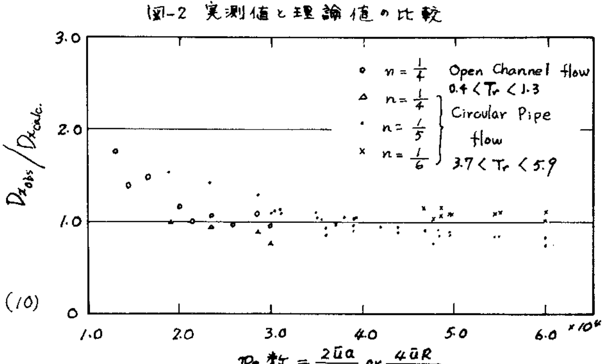


指数型流速分布をもつ定常乱流の分散係数は容易に求まる。乱流交番流の各瞬間の流速分布も指数型に従がうものとすると $T_r>>1$ の場合の交番流の分散係数が同一の表面流速をもつ定常流の$\frac{1}{2}$である(表-1)ことを考慮に入れると，乱流交番流の分散係数は 二次元開水路流と円管流に対し それぞれ次式であらわされる。

$$D_{x_{T_r>>1}} = \frac{\bar{u}_s^2 H^2}{K_z}\left\{\frac{n+1}{4(n+3)} + \frac{1}{2(n+2)(n+3)} - \frac{n+1}{2(n+2)(2n+3)} - \frac{1}{12}\right\} \quad (10)$$

$$D_{x_{T_r>>1}} = \frac{\bar{u}_s^2 a^2}{K_r}\left\{\frac{n+2}{8(n+4)} + \frac{1}{2(n+2)(n+4)} - \frac{1}{8(n+2)} - \frac{1}{16}\right\} \quad (11)$$

図-2 実測値と理論値の比較



指数型速度分布をもつ任意周期の乱流交番流の分散係数は 図-1と式(10),(11)から求まる。速度分布形状を与える指数nの値は 実験から定める。

実験と結果　開水路は全長14.2 m，0.4 m×0.4 m の矩形断面を有し 流路底に直径2mmの砂粒をはりつけてある。上流端のプランジャーによって流路内に交番流を発生させることができる。流速分布は 水素気泡の移動を映写機で撮影し 1コマずつ解析して求めた。指数は乱流強度の変化のために刻々変化するが 速度分布形は ほぼ指数型に従がい実験範囲内では 1周期の平均指数として$n=\frac{1}{4}$が最適であった。トレーサーとして比重1.0 に調節した42,000ppmの塩水を瞬間源として流入し 流路中心線に沿って4点で同時連続測定した。トレーサー注入後 6~7周期経過すると濃度が断面内でほぼ一様となり，拡散質の挙動は一次元分散方程式に従がう。一次元分散方程式の解は Holley－Harleman によって与えられている。

$$S = \frac{W}{\gamma A\sqrt{4\pi D_x t}}\,Exp\left[-\frac{\left\{x + \frac{\bar{u}_s}{\omega}(\cos\omega t - 1)\right\}^2}{4 D_x t}\right] \quad (12)$$

ここに Wは注入物質の負荷量である。(12)式で与えられるSが実測濃度と最も合致するD_xの値を求め，これを実測D_xとした。図-2は管水路乱流交番流で行なわれたHolley－Harlemanの実測値を含めた理論値と実測値の比較を示す。Re数が小さくなるにつれ 理論値と実測値の差が大きくなるが，これは粘性底層の厚さの増加と 1周期あたりの流れが"層流化"する比率の増大のためと考えられる。Re数の増加とともに流速分布の指数nが $\frac{1}{4}\to\frac{1}{5}\to\frac{1}{6}$ へと変化することが図-2から見出すことができる。開水路と管路実験の共通Re数は $(2.0\sim3.0)\times10^4$ であり，この範囲の無次元分散係数は 両実験でほぼ同一値を示す。

参考文献　S. Fukuoka : Research Bulletin, NO C9, Dept of Eng'g, James Cook Univ. Aust. May, 1973.
S. Fukuoka : Research Bulletin, No. C12, Dept of Eng'g, James Cook Univ. Aust. Feb, 1974.
E.R. Holley, D.R.F. Harleman : Rept. 74, Hydrodynamics Lab., M.I.T., Mass., 1965.