II-185 Time-History を考慮した乱流拡散理論

東京工業大学 正員 日野 幹雄

要旨：本報告では新たに"Particle history trace法"を提案する。従来の乱流拡散理論では，流体粒子の放出点からのtravel timeのみを問題にしたが，本方法では流体粒子にはtravel timeとrelease timeの2つのindexを付ける。この結果，乱流拡散におけるサンプリング・タイム効果や蛇行運動を厳密に定式化することができた。この際，新しいLagrange相関（Lagrangian travel-time and release-time cross-correlation）が導入される。このLagrange相関とEuler相関の関係を論じ，拡散濃度と採取時間の関係式を導いた。

1] 拡散現象における濃度と採取時間の問題：いわゆる拡散理論式から計算される等濃度線図は，Fig. 1aに示すように流軸に関し左右対称で滑らかな曲線であるが，実際に測定される等濃度線はFig. 1bに模式的に示すように左右対称とは限らず，また不規則な線となる。これは各瞬間瞬間の拡散質の分布は幅のより狭い分布を示し，流軸のまわりに不規則に変動しているからであり，十分長い時間の平均が理論式の与える濃度分布となる。したがって，採取時間sが短かいほど濃度は高くなり，長時間濃度が許容限界内にあっても短時間濃度としては可成り高い濃度が検出される可能性がある。濃度と採取時間に関しては"$-1/2$乗則"による逓減が知られている（井上(1952)，小倉(1958)，日野(1968)）。

$$C \propto s^{-1/2}$$

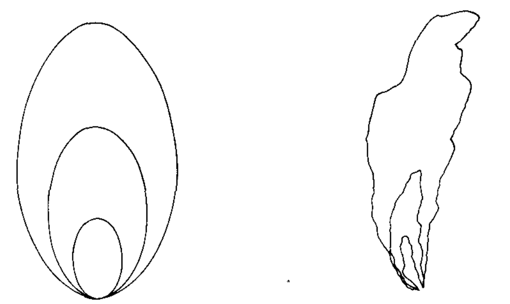


Fig. 1

しかし，従来の理論はその断定的な数式表示にもかゝわらず，小倉自身の云うように理論の誘導過程で厳密さを欠いたものであった。すなわち，採取時間sでの拡散幅$Y_s(T)$は，Taylor理論からの類推として

$$\overline{Y_s^2}(T) = 2\overline{v'^2}\int_0^T\int_0^t R_s(\tau)\,d\tau\,dt$$

と仮定している。こゝでは，$\overline{Y_s^2}(T)$の正しい表示を"Particle history tracing"により導く。

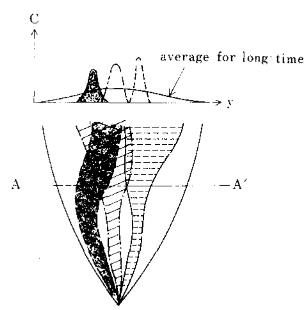


Fig. 2

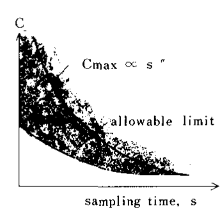


Fig. 3

2] Particle history tracing法：流体粒子に，放出源を出発してからのtravel time τと放出源でのrelease time $t+\xi$の2つの指標を付け $v_L(\tau, t+\xi)$ と表わす。travel time Tでの粒子の移動距離も，したがって2つの指標をもち，次のように表わされる。

$$Y(T, t+\xi) = \int_0^T v_L(\tau, t+\xi)\,d\tau \tag{1}$$

tを中心とする時間sの間に放出された粒子の平均位置は

$$\langle Y(T,t)\rangle_s = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2} Y(T, t+\xi)\,d\xi \tag{2}$$

となる。この平均位置からの各粒子の変位 $DY_s(T, t+\xi) = Y(T, t+\xi) - \langle Y(T,t)\rangle_s$ の variance は

$$\sigma_s^2(T,t) = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2}\{DY_s(T, t+\xi)\}^2 d\xi = \langle Y^2(T,t)\rangle_s - \langle Y(T,t)\rangle_s^2 \tag{3}$$

と表わされる。放出時刻tも特別ではないから，これに関しても平均を採れば採取時間sの間の粒子の拡散の

varianceは

$$\sigma_s^2(T) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2}\left[\langle Y^2(T,t)\rangle_s - \langle Y(T,t)\rangle_s^2\right]dt \tag{4}$$

式(4)の右辺の各項に式(1)を代入し，積分変数の変換・積分順序の変更など数次の変形操作を行えば，次の関係を得る。

$$\sigma_s^2(T) = 2\overline{v_\ell^2}\left[\int_0^T (T-\rho)R_\ell(\rho,0)\,d\rho\,d\tau - 2/s^2\int_0^s\int_0^T (s-\xi)(T-\rho)R_\ell(\rho,\xi)\,d\rho\,d\xi\right] \tag{5}$$

こゝに，$R_\ell(\rho,\xi)$は次式[*)]で定義される Lagrangian velocity travel-time and release-time cross-correlation）である。

$$R_\ell(\rho,\xi) = \overline{v_\ell(\tau,\eta)\,v_\ell(\tau+\rho,\eta+\xi)} \tag{6}$$

式(5)をスペクトル表示すれば

$$\sigma_s^2(T) = T^2\int_0^\infty S_\ell(f_1)\frac{\sin^2\pi f_1 T}{(\pi f_1 T)^2}\left[1-\int_0^\infty\frac{S_\ell(f_1,f_2)}{S_\ell(f_1)}\,\frac{\sin^2\pi f_2 s}{(\pi f_2 s)^2}\,df_2\right]df_1 \tag{7}$$

3] Lagrange 相関と Euler 相関 ： 上式の与える理論式を具体的に計算するためには，新しく導入された相関 $R_\ell(\rho,\xi)$ の関数形を定める必要がある。時刻 t に放出された粒子の ξ 時間後の Lagrange 速度 $v_\ell(\xi,t)$ は位置 $(\bar{U}\xi+x,\ y)$ での Euler 速度 $v_E(U\xi+x,\ y,\ 0)$ に等しい。こゝに，(x,y)は粒子の平均位置$(U\xi,\ 0)$からのズレ。 時刻 $t+\xi$ に今まさに放出点を出発しようとする粒子の速度 $v_\ell(0,\ t+\xi)$ と $v_\ell(\xi,t)$ との相関は $P(x,y)$を粒子の分布確率とすると，次のように表わされる。

$$R_\ell(-\xi,\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_E(\bar{U}\xi+x,\ y,\ 0)\,p(x,y)\,dx\,dy$$
$$\cong R_E(U\xi,0,0)\iint_{-\infty}^{\infty}\left[1+R_{Ex}\cdot x+R_{Ey}\cdot y+\cdots\right]p(x,y)\,dx\,dy$$

同様にして

$$R_\ell(\rho,\xi) \cong R_E(-\bar{U}\rho,\ 0,\ -\rho-\xi)$$

Taylor の frozen turbulence の仮説を decay rate により修正すれば

$$R_\ell(\rho,\xi) \cong \exp\left(\left|\left(\frac{U}{U_c}-1\right)\rho-\xi\right|\right)\times\exp\left(-\beta\left|\frac{U}{U_c}\rho\right|\right)$$

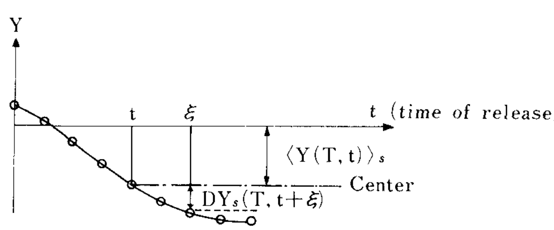


Fig. 4

4] sampling 効果 ：式(5)に上式の関係を代入すれば

$$\sigma_s^2 = \frac{2\overline{v_\ell^2}}{\beta^2}\left[\beta T-(1-e^{-\beta T})\right]\times\left[1-\frac{2}{s^2\alpha^2}\left\{\alpha s-(1-e^{-\alpha s})\right\}\right]$$

あるいは，2つの極限に対して

$$\sigma_s^2\begin{cases} = \sigma_\infty^2\cdot 0 & (s\to 0)\\ = \sigma_\infty^2\left(1-\dfrac{2S_*}{S}\right) & (s\gg s_*)\end{cases}$$

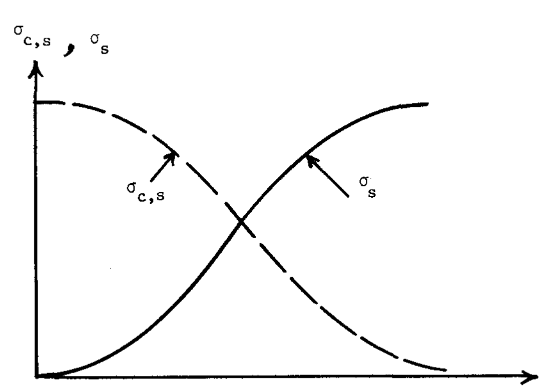
を得る。こゝに，$S_* = \int_0^\infty R_\ell(0,\xi)\,d\xi$ 。

特に，$S\approx 2S_*$ の領域では

$$\sigma_s^2 \approx 2\sigma_\infty^2\,S_*/S$$

2次元拡散場での拡散濃度はσ_sに逆比例するから，$S\gg S_*$に対して次の関係が導かれる。

$$C \propto \frac{1}{\sigma_\infty}\left(1-\frac{2S_*}{S}\right)^{-1/2}$$



*) R_ℓは厳密には$\rho=\tau-\xi$の他τにも関係し$R_\ell(\tau,\rho;\xi)$である。