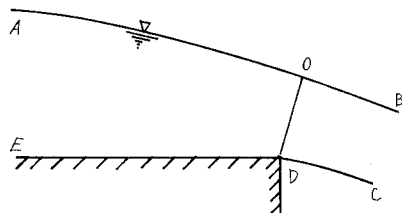


1. まえがき

水平な開水路から自由落下する二次元ポテンシャル流れについては、リラクゼーション法を用いてラプラスの方程式を解く方法が発表されている。ここでは平均流に垂直方向の流速の分布を仮定し、解析的に水路下流端の水面形を求める方法についてのべる。

2. 計算式

図に示すような 水平な床 ED を有する二次元開水路の下流端 D から自由落下するポテンシャル流れを考える。 D 点からの水面 AB の曲線に対する垂直線が 曲線 AB と交わる点を O とする。 O を原点とし 水面曲線 AB にそって x 軸をとり 下流向きに正とし 水面曲線に垂直に y 軸をとり 上向きを正とする。また x 軸に対する接線が水平となす角を θ とし x 軸が水平線より下にくる場合を正とする。つぎに x 軸と同心円の円周方向の流速を U y 方向の流速を V とし 水面曲線の曲率半径を R で表わせば 連続の式(1) および非回転の条件(2) を次のように表わすことができる。



$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 + \frac{y}{R}\right) V \right\} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R+y} - \frac{R}{R+y} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

いま水深を h 単位幅あたりの流量を q とすれば $q = \int_{-h}^0 U dy$ となり q が x に無関係ということから

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^0 U dy = 0 \quad \text{したがって} \quad \frac{dh}{dx} U_h + \int_{-h}^0 \frac{\partial U}{\partial x} dy = 0 \quad (3) \quad \text{となる。ここに } U_h \text{ は水流の下面における } U \text{ の値である。}$$

$$\text{一方 (1) 式から} \quad \left(1 - \frac{h}{R}\right) V_h = - \int_0^h \frac{\partial U}{\partial x} dy \quad (4) \quad \text{となる。} V_h \text{ は水流の下面における } V \text{ の値である。}$$

$$\text{そこで (3) (4) の両式から 次式が得られる。} \quad V_h = - \frac{R}{R-h} U_h \frac{dh}{dx} \quad (5)$$

いま DO 断面すなわち $x=0$ の断面について考えることにする。この断面においては $V_h = \sqrt{2gE} \sin \theta$ である。ここに E はこの流れのエネルギー水頭で D 点を基準としている。

V の値は水面においてゼロであるが、この値が y 軸にそって直線的に変化するものと仮定すれば

$$V = - \frac{y}{h} V_h = - \frac{y}{h} \sqrt{2gE} \sin \theta \quad (6)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y}{h^2} \frac{dh}{dx} \sqrt{2gE} \sin \theta - \frac{y}{h} \sqrt{2gE} \frac{1}{R} \cos \theta \quad (7) \quad \text{であるが (5) により} \quad \frac{dh}{dx} = - \frac{R-h}{R} \frac{V_h}{U_h}$$

$$= - \frac{R-h}{R} \tan \theta \quad \text{の関係があるから} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{y}{h^2} \frac{R-h}{R} \sqrt{2gE} \tan \theta \sin \theta - \frac{y}{h} \sqrt{2gE} \frac{1}{R} \cos \theta \quad \text{となり} \quad \text{したがって}$$

$$R \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{y}{h} \left(\frac{R-h}{h} \tan^2 \theta + 1 \right) \sqrt{2gE} \cos \theta \quad (8) \quad \text{となる。}$$

$$\text{そこで} \quad K = \frac{1}{2} \left(\frac{R-h}{h} \tan^2 \theta + 1 \right) \sqrt{2gE} \cos \theta \quad (9) \quad \text{とおけば } K \text{ は } y \text{ の関数ではない。}$$

(8) (9) の両式を (2) に代入すれば

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R+y} + \frac{2K}{R+y} \frac{y}{h} = 0 \quad (10) \quad \text{が得られ これを積分すれば}$$

$$U = - \frac{K}{h} \left(y - R + \frac{R^2}{R+y} \right) + \frac{D}{R+y} \quad (11) \quad \text{となる。} D \text{ は } y \text{ の関数ではない。}$$

そこで $q = \int_{-h}^0 U dy$ の関係を用いれば $D = -\frac{1}{\ln \frac{R-h}{R}} (q - \frac{1}{2} Kh - KR) + K \frac{R^2}{h}$ (12) となる

水脈の上面の流速を U_0 とすれば $U_0 = \frac{D}{R} = \sqrt{2g(E-h \cos \theta)}$ (13)

また 水脈下面の流速は $U_h = \frac{1}{R-h} (D - Kh) = \sqrt{2gE \cos \theta}$ (14) となる。

一オ この断面における流れの運動量の水平成分を M とすれば $M = \int_{-h}^0 (U/g + P/w) \cos \theta dy$ で表わすことができる。 g は重力の加速度 P は水圧 w は単位体積あたりの水の重さである。ベルヌーイの定理により $U^2/2g + P/w + (h-y) \cos \theta = E$ であるから 結局

$$M = Eh \cos \theta - \frac{1}{2} h^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2g} \left\{ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right) (D - Kh)^2 + 4KD \left(\frac{h^2}{3R^2} + \frac{h^2}{4R^2} \right) - 4Kh \left(\frac{h^2}{5R^2} + \frac{h^2}{6R^2} \right) \right\} \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{g} \left\{ D \left(\frac{h}{2R} + \frac{h^2}{3R^2} \right) - Kh \left(\frac{h}{4R} + \frac{h^2}{5R^2} \right) \right\} \sqrt{2gE} \sin^2 \theta - \frac{2}{3} Eh \sin^2 \theta \cos \theta$$
 (15) となる。

この運動量は上流側平行流の運動量に等しくなければならない。上流側平行流の運動量は その流れのフルード数 Fr によって異なる。 $Fr=1$ の場合には $M = \frac{2}{3} E^2$ (16) $Fr=2$ の場合には $M = \frac{1}{2} E^2$ である。

Fr がきまれば q の値は求められるから たとえば $Fr=1$ の場合には (9) (12) (13) (14) (15) (16) の諸式 により 南水路下流端の断面 $D0$ における h θ R の値を求めることができる。

断面 $D0$ においては K の値も定まるからこれを K_0 とし 上下流における断面について $K = \frac{h}{h_0} \frac{R_0}{R} K_0$ (17) と仮定する。 h が非常に小さいとき または R が非常に大きいときには $V=0$ としてよいからである。

断面 $D0$ より上流部については (12) (13) (15) (16) (17) を使い h_0 より大きな h の値を与えて それに対する R および θ の値を求めることができる。これらの値を用いて水面形を求めるには 図の D 点を原点として 水平下流向きに X 軸 上向きに Y 軸をとる。そのとき $\Delta X = \Delta x \cos \theta$, $\Delta Y = -\Delta x \sin \theta$ であるから 原点から n 番目の断面に添字 n をつけて表せば

$$\Delta X_n = \frac{R_n + R_{n-1}}{2} \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \cos \theta d\theta = \frac{R_n + R_{n-1}}{2} (\sin \theta_n - \sin \theta_{n-1})$$
 (18)
$$\Delta Y_n = -\frac{R_n + R_{n-1}}{2} \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \sin \theta d\theta = \frac{R_n + R_{n-1}}{2} (\cos \theta_n - \cos \theta_{n-1})$$
 (19)

断面 $D0$ より下流部については 落水脈の下面を基準としたエネルギー水頭を E で表わし (13) (15) における E の代りに E' と書き また (14) の代りに $U_h = \frac{1}{R-h} (D - Kh) = \sqrt{2gE'}$ とすれば これら 3式と (12) (16) の2式から h_0 より小さい h の値を与えて これに対する R および θ の値を求めることができる。そこで (18) (19) を用いれば落水脈の上面を求めることができる。水脈の下面の座標はそれぞれの断面における上面の座標 X, Y から $h \sin \theta$, $h \cos \theta$ と減ずることによって得られる。

3. 結 果

$Fr=1$ の場合 $E=1$ として 計算した結果 $D0$ 断面においては $h=0.408$ $\cos \theta=0.927$ $R=0.826$ $X_0=-0.153$ $Y_0=0.378$ を得た。上下流の各断面については 次のようになっている。 $X=0$ における Y の値は 0.434 となったが Mark Land がリラフゼーション法で行なった計算では 0.48 となっている。

h	$\cos \theta$	X	Y	h	$\cos \theta$	X_s	Y_s	X_B	Y_B
0.410	0.932	-0.139	0.382	0.400	0.820	0.482	0.199	0.254	-0.129
0.420	0.941	-0.107	0.395	0.390	0.783	0.613	0.102	0.371	-0.203
0.430	0.949	-0.071	0.408	0.380	0.744	0.749	-0.012	0.495	-0.295
0.440	0.956	-0.034	0.421	0.370	0.702	0.892	-0.149	0.629	-0.409
0.450	0.963	0.006	0.433	0.360	0.656	1.045	-0.315	0.774	-0.551
0.460	0.968	0.049	0.445	0.350	0.601	1.233	-0.547	0.953	-0.757