

京都大学 正員 岩佐義朗
京都大学 学生員 ○田中伸和

(1) はじめに：一般に、自由水面を有する流れの数値解法としては、流れを仮想粒子(marker particles)でおきかえ、ラグランジュ的概念を導入した「MAC法」がある。さらに、有限振幅波の解析のため、水位計算法および流速内挿法などを改良した修正法(SUMMAC法)が考えられている。しかし、これらの手法の差分式は、近似度が低く、とくに、水面格子では、本来、未定義であるはずの水面より上の値を用いるため、保存則が成立しない。その結果、実際に計算を行なうと、水面格子で連続条件が満たされなくなり、誤差が水中に伝播するとともに、水面形も高周波成分の位相誤差のため、下流側に微小変動を生じる。このような現象は、通常、プログラミングのテクニックで解決されがちなものであるが、ここでは、水面での値を厳密に定義することにより、有限振幅波の数値シミュレーションを行なう。

(2) 基礎方程式：完全流体の仮定による基礎方程式を、(Fig-1)のように、造波板上に原点をもつ移動座標 (x, y) に変換したのち、重力加速度および平均水深で無次元化すると、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} ① \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} &= 0 \\ ② \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + y + p + \dot{f}(t)x \\ ③ \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} &= v \end{aligned} \right\} \text{for } y = \eta$$

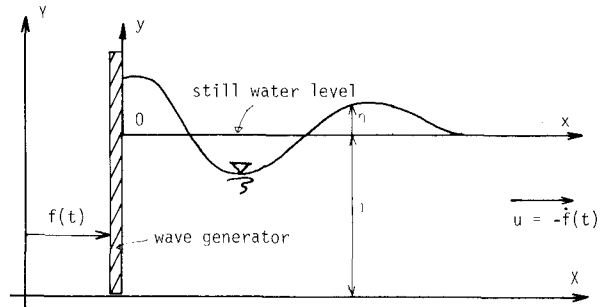


Fig - 1

これらの式は、Stokerの示すように、ピストン型造波板による波の発生を、シミュレートするものであり、線型解は、Biesel & Segurらにより求められているが、非線型解は得られていない。そのため、ここでは、①～③式を、差分法により数値積分することにより、解析を行なう。

(3) 差分方程式：流体を格子網でおおひ、流体内の格子点(○印)で、 u, v, ϕ, p の計算を行ない、水面(●印)では、 $u_s, v_s, \phi_s, p_s (=0)$ を計算する。(Fig-2)また、 ϕ の計算において、■印での ϕ を用いるため、この値は、その近傍の●印での ϕ より内挿する。内挿法は、低次のものを用いると、数値減衰および分散のため、解の発散の原因となりやすく、そのため、3次曲線近似により求める。なお、計算手順は、(Fig-3)に従って行なう。

a). ①式の差分：①式の差分解法として、加速リープマン法を用いる。すなわち、 (i, j) 格子点での ϕ は、

$$④ \quad \phi_{ij}^{(k+1)} = \phi_{ij}^{(k)} + \alpha [\bar{\phi}_{ij}^{(k)} - \phi_{ij}^{(k)}]$$

により、第 $(k+1)$ 次近似値を求め、 $M_{ij} \times |(\bar{\phi}_{ij}^{(k)} - \phi_{ij}^{(k)}) / \phi_{ij}^{(k)}| \ll 1$ になるまで、反復をくり返す。ここで、 α は加速係数であり、 $\bar{\phi}_{ij}^{(k)}$ は、

$$⑤ \quad \bar{\phi}_{ij}^{(k)} = \left\{ \left[\phi_{i+1,j}^{(k)} + \phi_{i-1,j}^{(k)} \right] / \Delta x^2 + \left[\phi_{i,j+1}^{(k)} + \phi_{i,j-1}^{(k)} \right] / \Delta y^2 \right\} / \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right)$$

(for Full cells)

$$⑥ \quad \bar{\phi}_{ij}^{(k)} = \left[(\eta_2 \eta_3 \eta_4 \phi_1 + \eta_1 \eta_3 \eta_4 \phi_3) / (\eta_1 + \eta_3) + (\eta_1 \eta_2 \eta_4 \phi_2 + \eta_1 \eta_2 \eta_3 \phi_4) / (\eta_2 + \eta_4) \right] / (\eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_4)$$

(for Surface cells,

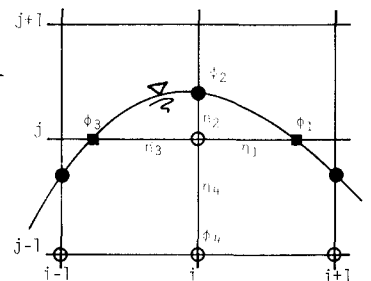


Fig - 2

により求める。

Fig - 2

b). ②式の差分：変数 $f(x, y)$ の水面での値を、 $f_s(x, y)$ で表わすと、 f の x および y での偏微分は、

$$⑦ \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=\eta} = \frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=\eta} = \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

のように、 f_s と η および $\frac{\partial \eta}{\partial x}|_{y=\eta}$ で表わされるため、 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ は、

$$\textcircled{8} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}(U_s^2 - V_s^2) + U_s V_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta + f(x) \cdot x$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_s - U_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + f \cdot x - (U_s + V_s \frac{\partial \eta}{\partial x})(U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + f) + V_s [1 + (\frac{\partial \eta}{\partial x})^2] \{ (V_s - U_s \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + 1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} \} + V_s [U_s (\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}) - V_s (\frac{\partial U_s}{\partial x} - \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x})] + U_s V_s (\frac{\partial V_s}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - V_s \frac{\partial \eta}{\partial x^2})$$

となる。したがって、 ϕ_s の時刻 $(n+1)\Delta t$ での値は、時刻 $n\Delta t$ での値より、

$$\textcircled{10} \quad \phi_s^{n+1} = \phi_s^n + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

で求められる。さらに、 $\textcircled{8}$ 、 $\textcircled{9}$ 式の x の偏微分を、 $O(\Delta x^2)$ の差分で表わすと、 $\textcircled{10}$ 式は、 Δt の2nd-order、 Δx の4th-order scheme になる。

c). $\textcircled{3}$ 式の差分：b)と同様にして、 Δx の4th-orderで表わすと、

$$\textcircled{11} \quad \bar{\eta}_i = \eta_{i-1}^n + V_s \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{ (V_s - U_s \frac{\partial \eta}{\partial x}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + 1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} \} + \{ U_s (\frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}) - V_s (\frac{\partial U_s}{\partial x} - \frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}) \} / \{ 1 + (\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 \} + O(\Delta t^3)$$

$$\textcircled{12} \quad \eta_i^{n+1} = \bar{\eta}_i + \frac{\Delta t^2}{2\epsilon} [\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}] \dots (\text{Fromm's 4th-order scheme})$$

のように、2-step scheme で表わされる。

d). U_s, V_s の計算： ϕ を y の3次曲線で近似すると、

$$\textcircled{13} \quad V_s = -\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=\eta} = -\left[\frac{3\epsilon^2 + 6\epsilon + 2}{\epsilon(\epsilon+1)(\epsilon+2)} (\phi_s - \phi_3) - \frac{(\epsilon+1)(\epsilon+2)}{2 \cdot \epsilon} (\phi_1 - \phi_3) + \frac{\epsilon(\epsilon+2)}{\epsilon+1} (\phi_2 - \phi_3) \right] / \Delta y \quad (\epsilon = \eta_z / \Delta y)$$

$$\textcircled{14} \quad U_s = -\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{y=\eta} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - V_s \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

になる。ここで、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は、 ϕ_s より下の格子点での ϕ の値を表わし、 $\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=\eta}$ 、 $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{y=\eta}$ も、 $\textcircled{13}$ 式と同様に、 y の3次曲線で近似する。

e). 圧力 P の計算： $\textcircled{2}$ 式より、 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ を後退差分で表わし、

$$\textcircled{15} \quad P_{ij}^{n+1} = [\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n] / \Delta t - [(U_{ij}^{n+1})^2 + (V_{ij}^{n+1})^2] / 2 - y - f(x) + O(\Delta t^2)$$

で求める。しかし、(Fig-4)のような場合は、 ϕ_{ij}^n が、確定していないため、 x 方向加速度 $-f(x)$ を考慮した Euler の式と渦無し条件より、

$$\textcircled{16} \quad P_{ij}^{n+1} = [\eta_2 \eta_3 \eta_4 R_{ij} + (\eta_2 \eta_3 \eta_4 p_1 + \eta_1 \eta_2 \eta_4 p_3) / (\eta_1 + \eta_3) + \eta_1 \eta_2 \eta_3 p_4 / (\eta_2 + \eta_4)] / (\eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_4) + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

$$\textcircled{17} \quad R_{ij} \equiv \{ (U_s^{n+1} \eta_4^2 - U_{ij}^{n+1} \eta_2^2 - (\eta_4^2 - \eta_2^2) U_{ij}^{n+1})^2 + \{ (V_s^{n+1} \eta_4^2 - V_{ij}^{n+1} \eta_2^2 - (\eta_4^2 - \eta_2^2) V_{ij}^{n+1})^2 \} / \{ \eta_2 \eta_4 + (\eta_2 + \eta_4)^2 \}^2$$

で求めることができる。

(4) 結果と考察：(Fig-6)は、 $f(x) = 0.2 \sin x$ の場合の第一波の山および谷での水面下の流速分布および圧力分布を示し、そのときの水面形は、(Fig-5)に示す。なお、メッシュ間隔は、 $\Delta t = 0.04$ 、 $\Delta y = 1/7.5$ 、 $\Delta x = 1.5 \cdot \Delta y$ にとった。あきらかに、この差分法で得られる結果は、数値解の高周波成分の影響をうけなく、滑らかな曲線(結果)が得られた。

さらに、周期、振幅を変えた結果については、講演時に発表する予定である。

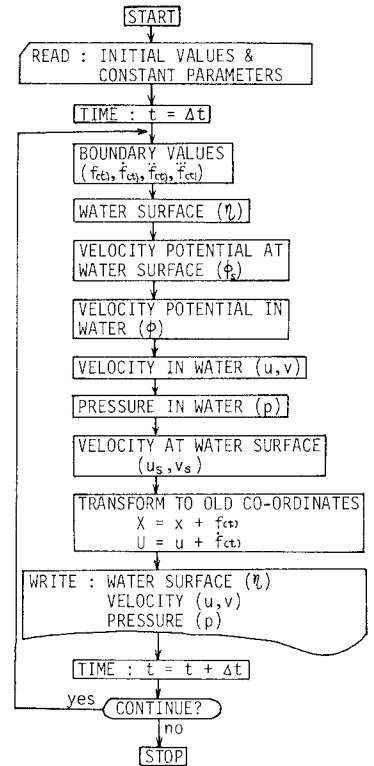


Fig - 3

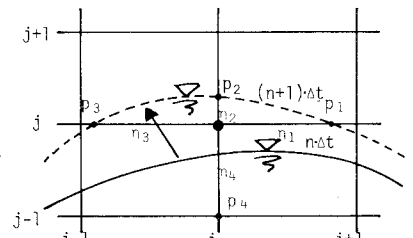


Fig - 4

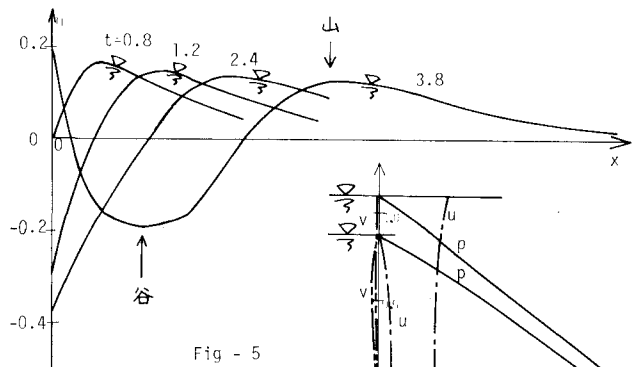


Fig - 5

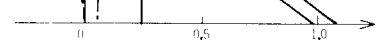


Fig - 6