II-166　グラフ理論による開水路網不定流の解析法について(第2報)

京都大学工学部　正員　岩佐　義朗
京都大学工学部　正員○綾　史郎

はじめに.

著者らは、グラフ理論を用いた水路網の解析法について研究してきた[1]。本来, グラフ理論は集中定数系について適用すると都合よいから, 水工学の分野においては管路網の解析への適用は比較的容易であるが, 開水路網の場合は若干複雑となる。さきに第1報[2]では区間平均水深, 区間平均流速を用いた場合の開水路網の解析法について報告したが、本報文では、基礎方程式を leap frog 型で差分し、グラフ理論を適用した場合について報告する。なお, 簡単のため, 対象とする開水路網は長方形断面の一様水路から構成されているものとする。

1．基礎方程式と定式化

運動方程式として, 一次元エネルギー方程式(1), 連続方程式として長方形断面の仮定で変形した式(2)を用いると,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=i_0-i_f \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}=0 \tag{2}$$

連続方程式(2)を用いて、運動方程式(1)を変形すると

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\left(1-\frac{u^2}{gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{u}{gh}\frac{\partial h}{\partial t}=i_0-i_f \tag{3}$$

基礎方程式として式(2), (3)を用いる。ここに u; 流速, h; 水深, g; 重力加速度, i_0; 底こう配, i_f; 摩擦こう配, t; 時間, x; 距離

式(3)より流速を求め, また式(2)より水深を求める。まず式(3)を式(4)~(8)になるように leap frog 型で差分する。ただし, 流速計算点では水深が計算されないので、流速計算点 i の両隣の水深計算点 j, $j+1$ の水深の平均値で近似する。(図1)

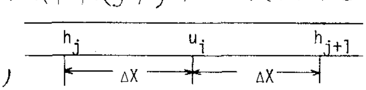

図1

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\fallingdotseq\frac{1}{2g\Delta t}\left(u_i^{n+2}-u_i^{n}\right) \tag{4}$$

$$\left(1-\frac{u^2}{gh}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\fallingdotseq\left\{1-\frac{2(u_i^n)^2}{g(h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1})}\right\}\frac{h_{j+1}^{n+1}-h_j^{n}}{2\Delta x} \tag{5}$$

$$\frac{u}{gh}\frac{\partial h}{\partial t}\fallingdotseq\frac{2u_i^n}{g(h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1})}\cdot\frac{(h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1})-(h_j^{n-1}+h_{j+1}^{n-1})}{4\Delta t} \tag{6}$$

抵抗則として、Manning式を用いれば, 摩擦こう配 i_f は流向の変化を考慮して

$$i_f\fallingdotseq\frac{n_i^2}{R_i^{4/3}}|u_i^n|u_i^{n+2} \tag{7}$$

$$R_i\fallingdotseq\frac{b_i(h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1})}{2(b_i+h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1})} \tag{8}$$

つぎに連続条件は, 図2, 図3を参照して斜線部の貯留量の変化が, 流入流量と流出流量の差に等しいことであるから, 連続方程式の第1項を中央差分し,

$$\frac{\partial h}{\partial t}\fallingdotseq\frac{h_j^{n+3}-h_j^{n+1}}{2\Delta t} \tag{9}$$

また, 第2項はつぎのように近似して(図2)

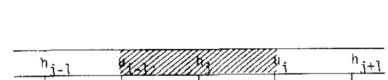

図2

$$\frac{\partial uh}{\partial x}\rightarrow\frac{1}{2b\Delta x}\left(u_{i-1}\frac{h_j^{n+1}+h_{j-1}^{n+1}}{2}-u_i\frac{h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1}}{2}\right) \tag{10}$$

分岐・合流水路では（図3）

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) \longrightarrow \frac{1}{S_j}\left(u_{i-1}\frac{h_j^{n+1}+h_{j-1}^{n+1}}{2} - u_i\frac{h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1}}{2} - u_{i+1}\frac{h_j^{n+1}+h_{j+2}^{n+1}}{2}\right) \qquad (11)$$

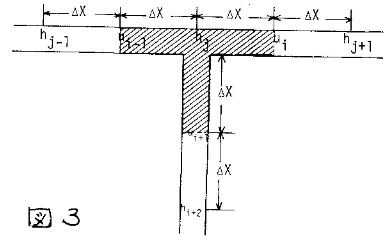

図3

ここに　$S_j = b_{i-1}\Delta x_{i-1} + b_i \Delta x_i + b_{i+1}\Delta x_{i+1}$ (12)

つぎに水路網を，水路網の境界断面，流出入点，分岐・合流断面が水深計算点となるように適当な差分格子でおおう。差分格子のうち，水深計算点を節点に選び，節点間を水路網と同形に有向枝で結ぶ。流速計算点は枝に対応するから，節点変量として水深，枝変量として流速を選ぶと，節点－枝接続行列を用いて，運動方程式，連続方程式はつぎのようにまとめて定式化される。

運動方程式は式(4)，(5)，(6)，(7)を用いて

$$\frac{1}{2g\Delta t}(\mathbf{u}^{n+2}-\mathbf{u}^{n})-\frac{1}{2\Delta x}\left\{\mathrm{E}-\frac{2}{g}(\mathrm{H}_i^{n+1})^{-1}\mathrm{U}_2^{n}\right\}\mathrm{A}^*\mathbf{h}^{n+1}-\frac{1}{4g\Delta t}(H_i^{n+1})^{-1}U^{n}(\mathbf{h}_i^{n+1}-\mathbf{h}_i^{n-1})=i_0-N\cdot R\cdot|U^{n}|\mathbf{u}^{n+2} \qquad (13)$$

連続方程式は式(8)，(9)および(10)をまとめて

$$\frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{h}^{n+3}-\mathbf{h}^{n+1})+\frac{1}{2}ASU^{n+2}|A^*|\mathbf{h}^{n+1}=0 \qquad (14)$$

ここに，A；節点－枝接続行列，A^*；Aの転置行列，$|A^*|=[|a_{ij}^*|]$，$\mathbf{u}$；各枝の流速を成分とするベクトル，$\mathbf{h}$；各節点の水深を成分とするベクトル，$\mathbf{h}_i$；各枝の水深をあらわすベクトル，$\mathbf{h}_i=|A^*|\mathbf{h}$で定義される。$H_i$，U，$U_2$，N，R，S；それぞれ$h_i$，$u_i$，$u_i^2$，$n^2$，$1/R_i$，$1/S_j$を対角要素とする対角行列，E；単位行列

式(13)より未知流速$\mathbf{u}^{n+2}$，式(14)より未知水深$\mathbf{h}^{n+3}$を求めることができる。図4は計算のflow chartを示したものである。初期条件として必要な量は，$t=0$の流速，$t=\Delta t$の水深，$t=-\Delta t$の水深が必要である。境界条件としては，水深および流量が与えられることが多いが，水深が与えられる場合には，その節点における水深を既知とすればよい。また，流量で与えられる場合には，水深計算点（節点）へ集中的に流出入する point sourse（sink）と考えて，節点に対して定義される流出入流量ベクトル$\mathbf{g}$（流出を正とし，流出入流量のない場合は$g_j=0$）を式(14)の左辺に加えればよい。

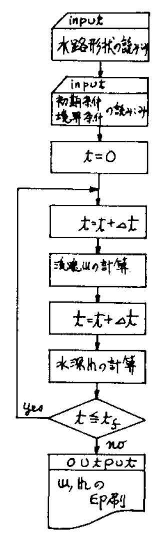

図4

この他に，計算条件として陽形の差分型であるから，Courant・Friedrichs・Lewyの条件[3]が適用されて

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geqq \sqrt{gh}+|u| \qquad (15)$$

2．結語

接続行列を用いた開水路網の計算式(13)，(14)は水路の連結関係を表わしている点で一般的であり，電子計算機の使用を考えるとき，プログラムの汎用性が得られる点で有用である。しかし，行列を用いているため，大きな水路網を解析する場合，計算機の容量の制限を受ける欠点がある。なお，第1報との相違は，さきに基礎式を距離xについて積分したうえで未知量を求めていたのに対し，本報文では，差分化によって未知量を求めたこと，およびその結果として運動方程式(1)の移流項$\frac{1}{g}u\,\partial u/\partial x$を分岐・合流水路の計算の際，省略せずに定式化が可能になったことが異なっている。

参考文献　(1) 常松芳昭：水の輸送・配分に関するシステム的研究　京都大学博士論文　1973

(2) 岩佐・綾；グラフ理論による開水路網不定流の解析法について　昭和49年度関西支部年次講演会梗概集

(3) 水理公式集 p.p. 187～189