

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

〃 〃 〇井上 和也

〃 栗林 栄一

茨水流をはじめとする開水路の非定常流の数値シミュレーションを行なうとき、境界条件の課せられていゝ境界点とそうでない中間点とでは計算方式を若干変更する必要があることが多い。例えば、Lax-Wendroff の差分 scheme は境界点では適用されないため代りに Box scheme がとられたり、あるいは与えられた境界条件以外にいわゆる computational boundary condition が追加されたりする。¹⁾

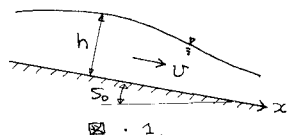
本報は、上流端の境界条件としてゆるやかな水位変化を与えられた非定常流に関し、線型化された基礎式の解析解と特性曲線法および Box scheme による境界点の差分解とを比較し、その差について考察を行ない、連続式より境界条件の扱い方について述べたものである。

1. 基礎式とその線型化

基礎式としてつぎの連続式とエネルギー式を考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = S_0 - S_f \quad \dots (2)$$



ここで、 $S_f = n^2 u^2 / h^4$ としておく。いま、定常等流の状態 ($u=U_0$, $h=h_0$, $S_0=S_f$) を考え、これに上流端 ($x=0$) でつぎの擾乱が加ったときの流れ ($x \geq 0$) を考える (m は微小な量とする)。

$$x=0, t>0 \quad h=h_0 + mt \quad \dots (3)$$

さて、(1), (2) 式において、 $h=h_0+\eta$, $u=U_0+u$ とおく。擾乱の初期においては η, u は十分に小さくそれらの2次以上の項は無視されるとすると、(1), (2) 式は線型化される。これらの2式から u を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2U_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - (g h_0 - U_0^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g S_0 \left(\frac{2}{U_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{10}{3} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad \dots (4)$$

となる。また、初期条件: $t=0, x>0$ で $\eta=0$, 境界条件: $t>0, x=0$ で $\eta=mt$ である。(4) 式を擾乱の初期に限定して解き、 h_0 とまとめるとつぎのようになる。²⁾

$$h = \begin{cases} h_0 + m \left(t - \frac{x}{U_0 + \sqrt{g h_0}} \right) \cdot \exp \left(- \frac{\lambda x}{\sqrt{g h_0}} \frac{1 - 2\beta F}{1 + F} \right) + O \left(t - \frac{x}{U_0 + \sqrt{g h_0}} \right)^2 & ; x < (U_0 + \sqrt{g h_0}) t \\ h_0 & ; x \geq (U_0 + \sqrt{g h_0}) t \end{cases} \quad \dots (5)$$

ここで、 $F = U_0 / \sqrt{g h_0}$, $\lambda = g S_0 / U_0$ である。(5) 式を用いて流速を求めると、

$$u = \begin{cases} U_0 + \alpha t' + \beta (1 - e^{-2\lambda t'}) & ; t' \equiv t - x / (U_0 + \sqrt{g h_0}) > 0 \\ U_0 & ; x \geq (U_0 + \sqrt{g h_0}) t \end{cases} \quad \dots (6)$$

となる。ここで、 $\alpha = m U_0 (3 - F + 2F^2) e^{-\frac{\lambda x}{\sqrt{g h_0}} \frac{1 - 2\beta F}{1 + F}} / 6 F h_0$, $\beta = m U_0 (3 + F - 2F^2) e^{-\frac{\lambda x}{\sqrt{g h_0}} \frac{1 - 2\beta F}{1 + F}} / 12 F h_0$ であり、またその高次の項は省略されている。(6) 式より、上流端における流速の変化は t' が小さいとき、

$$u|_{x=0} = U_0 + \sqrt{g h_0} m t' \quad \dots (7)$$

である。なお、以上の関係は擾乱の初期に限られていて、 $\lambda (t - x / (U_0 + \sqrt{g h_0})) < 1$ の領域で適用される。

2. 差分法による解との比較

擾乱の初期のみを扱っているのだから、差分法による解も図・2のように、最上流の区間だけ、しかも $\lambda=0$ のときのみについて求めることにする。A, B 点では初期条件より $h_A=h_B=h_0$, $u_A=u_B=U_0$, $(S_f)_A=(S_f)_B=S_0$ であり、

また出口では境界条件より $h_B = h_0 + m \Delta t$ である。なお、計算の安定条件より、 $\Delta t / \Delta x < 1 / (U_0 + \sqrt{gh_0})$ としておく。

特性曲線法による解: (1), (2) 式を特性曲線表示に改めると、

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{gh} \quad \text{に} \quad g dh + (\frac{dx}{dt} - U) dU - g(S_0 - S_f) (\frac{dx}{dt} - U) dt = 0 \quad \dots (8)$$

となる。これを前報³⁾の方法によって差分化し、C, D 点の h , U を求めると、

$$h_C = h_0, U_C = U_0, U_D = U_0 + \sqrt{g/h_0} m \Delta t \quad \dots (9)$$

となって、線型方程式の解析解 (5), (6), (7) 式と一致した結果が得られる (ただし $\Delta t = \tau$)。

Box scheme による解: 最上流の区間に適用されるとき、Box scheme は通常つぎのように表わされる¹⁾。

$$(h_D - h_A) / \Delta t + (h_C - h_B) / \Delta t + (Q_C - Q_D) / \Delta x + (Q_B - Q_A) / \Delta x = 0 \quad \dots (10)$$

ただし $Q = Uh$ である。これを用いて U_D を求めるには、 Q_C , h_C を知らなければならないが、これらは Lax-Wendroff 法あるいは特性曲線法などの explicit な手法で求められているとする。このときと同様に $h_C = h_0$, $U_C = U_0$ であるから、 Q_D , U_D はつぎのようになる ($Q_0 = U_0 h_0$)。

$$Q_D = Q_0 + m \Delta x, U_D = (Q_0 + m \Delta x) / (h_0 + m \Delta t) \approx U_0 + m (\Delta x - U_0 \Delta t) / h_0 \quad \dots (11)$$

安定条件より $(\Delta x - U_0 \Delta t) / h_0 > \sqrt{g/h_0} \Delta t$ であるから、結局この場合の Box scheme は上流端の流速に解析解より過大な値を与えることになる。

3. 貯留量と流出流量

上述のような誤差の理由はつぎのように考えられる。まず、流下距離があまり大きくない区間に限ることとし、 $\lambda x / \sqrt{gh_0} \left(\frac{1 - \gamma^2 H}{1 + H} \right) \ll 1$ としておく。(5) 式で表わされる

水面形は図3のようであり、 $t=0 \sim \Delta t$ の間に $0 \sim x$ の区間に貯留された水量の増加 $\Delta V(x)$ (図の斜線の部分) は、

$$\Delta V(x) = \int_0^x (h - h_0) dx = \begin{cases} mx(\Delta t - x/2(U_0 + \sqrt{gh_0})) & ; x < (U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t \\ m\Delta t^2 (U_0 + \sqrt{gh_0})/2 & ; x \geq (U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t \end{cases} \quad \dots (12)$$

で与えられる。すなわち、 $\Delta V(x)$ は、 $t = \Delta t$ での水面形を直線であるとし、かつその先端が $(U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t$ にけし込んだときの貯留量である。また、 $0 \sim \Delta t$ の間にある断面を流下する水量 (基流流量 Q_0 を除く) $\Delta Q(x)$ は、

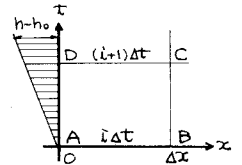
$$\Delta Q(x) = \int_0^{\Delta t} (Q - Q_0) dt = \begin{cases} m(U_0 + \sqrt{gh_0})(\Delta t - x/(U_0 + \sqrt{gh_0}))^2 & ; x < (U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t \\ 0 & ; x \geq (U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t \end{cases} \quad \dots (13)$$

となる。以上の2式より、 x の大小にかかわらず、 $\Delta V(x) = \Delta Q(0) - \Delta Q(x)$ が導かれ、(1) 式を積分した連続式が満たされていることが確認される。

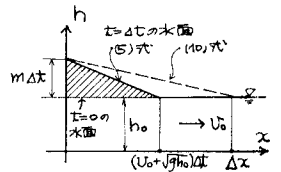
一方、(10) 式の Box scheme は、(1) 式の連続式を図2で示される四辺形 ABCD の間に沿う積分に改め、かつ各辺の積分を台形公式で近似した関係に他ならない。このことは、 $t = \Delta t$ での水面形を図3の破線と近似することに相当する。その結果、 $0 \sim \Delta t$ 間の貯留量の増加を (12) 式より過大に見積もることになり、上流端の流量ならびに流速が解析解より大きくなるという誤差が生じたのである。

上述の誤差の相対的な程度は Δx と $(U_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t$ の大きさに関係し、またその相対的な大きさは水深の変化率にも関係する。この誤差が解全体にどの程度影響するかは明らかでないが、水深の変化がゆるやかなとき特性曲線法と Box scheme とでほとんど差のない例もあり、誤差はあまり大きくないと予想される。しかし、水深の変化の大きいとき (単斜上昇波も含む) には必ずしも無視しえないと考えられるので今後検討を怠めたり。

文献: 1) 伊藤剛典, 「数値解析の応用と基礎」, アラベス版, 1971. 2) M.J. Lighthill and G.B. Whitham, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 229, 1955. 3) 岩佐 井・伊藤, 昭和48年度年報, II-117, 1973. 4) 岩佐 井・岸松, Proc. 1st Bi-lateral U.S.-Japan Seminar in Hydrology, 1971.



図・2



図・3