II-164　グリーン関数による開水路不定流の解析

北見工業大学　正会員　○佐渡公明
北見工業大学　正会員　岡田包儀

1. まえがき　開水路非定常流の数値解析は，各種の差分法，特性曲線法等により行われており，特にTwo-Step Lax-Wendroff法が良く使われているが，原微分方程式が非線形なためconvergency，stabilityの条件が厳密でない。そこで定常な水理量に比べ非定常な変動部分が著しく小さいという微少振幅理論を使い，方程式を線形化し，Green関数を使ってその解をExplicitな形に求めることがWilfried Brutsaert[1]により行われている。この論文では水位について述べられず，実際の計算例がないので，微少振幅理論の適用の可否について不明である。ここでは双曲型偏微分方程式へのGreen関数の適用を述べ紙面が許せば洪水，感潮河川の計算例を述べる。

2. 方程式の線形化　幅の広い長方形断面水路の不定流の連続方程式，運動方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{q_L}{b}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(i_f-i_0)+\frac{q_L u}{bh}=0 \qquad (2)$$

h：水深　q：単位幅当りの流量　b：水路幅
q_L：水路単位長当りの横流入量　u：平均流速
i_f：摩擦勾配　i_0：水路床勾配　g：重力加速度
添字0：定常流に対する水理量
添字p：定常値よりの非定常な変動量

いま $u=u_0+u_p$，$h=h_0+h_p$，$q=q_0+q_p$ とおき $u_0 \gg u_p$，$h_0 \gg h_p$，$q_0 \gg q_p$ と仮定しManning流速公式を使うと(1)，(2)式は

$$\frac{\partial h_p}{\partial t}+\frac{\partial q_p}{\partial x}-\frac{q_L}{b}=0 \qquad (1)'$$

$$(gh_0^3-q_0^2)\frac{\partial h_p}{\partial x}+2q_0h_0\frac{\partial q_p}{\partial x}+h_0^2\frac{\partial q_p}{\partial t}+2gh_0^3 i_0\left(\frac{q_p}{q_0}-\frac{5}{3}\frac{h_p}{h_0}\right)=0 \qquad (2)'$$

(1)′，(2)′式よりh_pを消去し1本の式にすると

$$(gh_0^3-q_0^2)\frac{\partial^2 q_p}{\partial x^2}-2q_0h_0\frac{\partial^2 q_p}{\partial x\partial t}-h_0^2\frac{\partial^2 q_p}{\partial t^2}-\frac{10}{3}gh_0^2 i_0\frac{\partial q_p}{\partial x}-2gh_0^3\frac{i_0}{q_0}\frac{\partial q_p}{\partial t}=\frac{(gh_0^3-q_0^2)}{b}\frac{\partial q_L}{\partial x}-\frac{10}{3}gh_0^2 i_0\frac{q_L}{b} \qquad (3)$$

同様に(1)′，(2)′式よりq_pを消去すると

$$(gh_0^3-q_0^2)\frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2}-2q_0h_0\frac{\partial^2 h_p}{\partial x\partial t}-h_0^2\frac{\partial^2 h_p}{\partial t^2}-\frac{10}{3}gh_0^2 i_0\frac{\partial h_p}{\partial x}-2gh_0^3\frac{i_0}{q_0}\frac{\partial h_p}{\partial t}=-\frac{2q_0h_0}{b}\frac{\partial q_L}{\partial x}-\frac{h_0^2}{b}\frac{\partial q_L}{\partial t}-\frac{2gh_0^3 i_0}{b}\frac{q_L}{q_0} \qquad (4)$$

(3)，(4)式は簡単に　$L[y]=Ay_{xx}-2By_{xt}-Cy_{tt}-Dy_x-Ey_t=\phi(x,t)$　(5)

流量で表わした(3)式では　$y=q_p$，$\phi(x,t)=$(3)の右辺でq_Lの関数
水深で表わした(4)式では　$y=h_p$，$\phi(x,t)=$(4)の右辺で　〃
A, B, C, D, E：(5)と(3)を比べれば直ちに分かり定常値で表わされる定数である。

(5)式は非同次の双曲型偏微分方程式で自己随伴形ではない。

結局，(5)式を次の境界条件，初期条件で解くことになる。

$$\text{境界条件}\quad \left.\begin{aligned} &y(0,t)=y_u(t)\ ;\ x=0,\ t>0\\ &y(\infty,t)=0\ ;\ x\to\infty,\ t>0\end{aligned}\right\}\ (6) \qquad \text{初期条件}\quad \left.\begin{aligned} &y(x,0)=0\ ;\ x>0,\ t=0\\ &\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=0\ ;\ x>0,\ t=0\end{aligned}\right\}\ (7)$$

3. 広義のグリーンの公式の適用

Green関数によって微分方程式を解く場合には，まずこの公式の適用から始まる。すなわちこの公式は

$$\iint_D\{zL[y]-yM[z]\}\,dx\,dt=\oint_C(P\,dt-Q\,dx) \qquad (8)$$

ここに　D：閉曲線Cで囲まれたx，t平面上の区域　　$M[z]$：$L[y]$の随伴微分表式

$P=Azy_x-y(Az)_x-2zBy_t-Dyz$　　$Q=2y(Bz)_x-Czy_t+y(Cz)_t-Eyz$

(8)式で独立変数を$x\to\xi$，$t\to\tau$に変え，積分区間を$0\sim\infty$ for ξ，$0\sim T\ (T>t)$ for τとし，$z=G(\xi,\tau;x,y)$を代入して

$$\int_0^T\!\!\int_0^\infty\{G(\xi,\tau;x,t)L[y]-yM[G]\}\,d\xi\,d\tau$$

$$=\int_0^T\Big[AGy_\xi-yAG_\xi-2GBy_\tau-DyG\Big]_{\xi=0}^{\xi=\infty}d\tau+\int_0^\infty\Big[2yBG_\xi-CGy_\tau+yCG_\tau-EyG\Big]_{\tau=0}^{\tau=T}d\xi \qquad (9)$$

この(9)式で Green 関数 $G(\xi,\tau;x,t)$ が次の(10),(11)式

$$M[G(\xi,\tau;x,t)] = \delta(\xi-x)\,\delta(\tau-t) \qquad (10)$$

δ：ディラックの δ 関数

$$\left.\begin{aligned} G(0,\tau;x,t) &= 0 \ ;\ \xi=0,\ \tau>0 \\ G(\xi,\tau;x,t) &= 0 \ ;\ \xi>0,\ \tau>t \\ G_\xi = G_\tau &= 0 \ ;\ \xi>0,\ \tau>t \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

を満足するならば(6),(7)式の条件より，(9)式は次式となる。

$$y(x,t) = \int_0^t\int_0^\infty G(\xi,\tau;x,t)\,\phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau - \int_0^t \left[A\,y_u(\tau)\,G_\xi\right]_{\xi=0} d\tau \qquad (12)$$

従って，(5)を(6),(7)の条件で解くことは，(10)を(11)の条件で解いた G を(12)に代入して y を求めることになる。

4. Green関数の決定　(10)式を(11)式の条件で解いても満足すべき解は得られない。それは(5)式が双曲型で自己随伴でないためで，一般の波動方程式の因果律[2)]と同じである。この場合随伴 Green 関数 G^* を利用すればよい。G^* の定義は　$M[G^*(x,t;\xi,\tau)] = \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau)$　(13)　を満足し，G^* の境界上の値が適当に選ばれていて，(8)式で $y = G(x,t;\xi,\tau)$，$z = G^*(x,t;\xi,\tau)$ と代入したとき右辺の曲線積分が丁度0となるということである。この定義で x,t を夫々 ξ,τ に置き換えると(13)式は(10)式に一致し，G^* は次式を満足しなければならない。

$$L[G^*(\xi,\tau;x,t)] = \delta(\xi-x)\,\delta(\tau-t) \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} G^*(0,\tau;x,t) &= 0 \ ;\ \xi=0,\ \tau>0 \\ G^*(\xi,0;x,t) = G^*_\tau(\xi,0;x,t) &= 0 \ ;\ \xi>0,\ \tau=0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

従って(10)式を(11)式の条件で解くことは，(14)式を(15)式の条件で解くことになり，G^* が求まれば G は次の相反性より求まる。

$$G(x,t;\xi,\tau) = G^*(\xi,\tau;x,t) \qquad (16)$$

(14)式をラプラス変換し，(15)の第2式を使うと

$$A\,\overline{G^*_{\xi\xi}} - (2Bs+D)\,\overline{G^*_\xi} - (Cs^2+Es)\,\overline{G^*} = e^{-st}\,\delta(\xi-x) \qquad (17)$$

(17)式の解は

$$\overline{G^*} = C_1 e^{\Delta_1\xi} + C_2 e^{\Delta_2\xi} \quad \text{for } x<\xi<\infty \qquad (18)$$

$$\overline{G^*} = C_3 e^{\Delta_1\xi} + C_4 e^{\Delta_2\xi} \quad \text{for } 0\leqq\xi<x \qquad (19)$$

$\overline{G^*}$：G^* のラプラス変換　　Δ_1, Δ_2：(17)の特性方程式の根

C_1, C_2, C_3, C_4 は次の条件で決定される。　(イ) $\lim_{\xi\to\infty}\overline{G^*} = 0$　　(ロ) $\overline{G^*}(0,\tau;\xi,t) = 0$; $\xi=0$, $\tau>0$

(ハ) $\xi=x$ で $\overline{G^*}$ が連続　　(ニ) $\xi=x$ で $\dfrac{\partial\overline{G^*}}{\partial\xi}$ が不連続　即ち $\int_{\xi=x-0}^{\xi=x+0}$ (17)の左辺 $= e^{-st}$ より $\left.\overline{G^*_\xi}\right|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = \dfrac{e^{-st}}{A}$

これで $\overline{G^*}(\xi,\tau;x,t)$ が求まり逆ラプラス変換をして $G^*(\xi,\tau;x,t)$ が求まり(16)式より $G(x,t;\xi,\tau)$ が得られ主変数とパラメータを入換えて $G(\xi,\tau;x,t)$ が結局次式のように求まる。

$$\begin{aligned} G(\xi,\tau;x,t) = \frac{-\exp\{d_1(x-\xi) - d_2(t-\tau)\}}{2\sqrt{g h_0^5}} \Bigg[& I_0\left\{ d_3\sqrt{\left(t-\tau-\frac{(x-\xi)}{C_{01}}\right)\left(t-\tau-\frac{(x-\xi)}{C_{02}}\right)} \right\} H\left\{ t-\tau-\frac{u_0(x-\xi)}{C_{01}C_{02}} + \sqrt{gh_0}\,\frac{|x-\xi|}{C_{01}C_{02}} \right\} \\ & - I_0\left\{ d_3\sqrt{\left(t-\tau-\frac{x}{C_{01}}+\frac{\xi}{C_{02}}\right)\left(t-\tau-\frac{x}{C_{02}}-\frac{\xi}{C_{01}}\right)} \right\} H\left\{ t-\tau-\frac{x}{C_{01}}+\frac{\xi}{C_{02}} \right\} \Bigg] \end{aligned} \qquad (20)$$

ここに　I_0：0次の第1種変形ベッセル関数　　H：ヘビサイドの階段関数　　F_{r0}：$u_0/\sqrt{gh_0}$（定常流のフルード数）

$$d_1 = \frac{2}{3}\frac{i_0}{h_0} \quad d_2 = \frac{i_0 u_0}{h_0}\frac{\left(\frac{2}{3}F_{r0}^2+1\right)}{F_{r0}^2} \quad d_3 = \frac{i_0 u_0}{h_0}\sqrt{(1-F_{r0}^2)\left(1-\frac{4}{9}F_{r0}^2\right)}\Big/F_{r0}^2 \quad C_{01} = u_0+\sqrt{gh_0} \quad C_{02} = u_0-\sqrt{gh_0}$$

ただし(20)式は $F_{r0}<1$ の定常流が常流に対しての式である。(20)式を(12)式に代入して最終的に解は次の形になる。

$$\begin{aligned} y(x,t) = & \int_0^t\int_0^\infty G(\xi,\tau;x,t)\,\phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + y_u\!\left(t-\frac{x}{C_{01}}\right)e^{-d_4 x} \\ & + \frac{d_3}{2}\left(\frac{x}{C_{01}}-\frac{x}{C_{02}}\right)e^{d_1 x}\int_0^{t-\frac{x}{C_{01}}} \frac{y_u(\tau)}{e^{d_2(t-\tau)}}\, \frac{I_1\left\{d_3\sqrt{\left(t-\tau-\frac{x}{C_{01}}\right)\left(t-\tau-\frac{x}{C_{02}}\right)}\right\}}{\sqrt{\left(t-\tau-\frac{x}{C_{01}}\right)\left(t-\tau-\frac{x}{C_{02}}\right)}}\,d\tau \end{aligned} \qquad (21)$$

$$d_4 = \frac{i_0}{h_0}\frac{\left(1-\frac{2}{3}F_{r0}\right)}{(F_{r0}^2+F_{r0})}$$

これにより $y_u(t)$ に $x=0$ での流量変動，水深変動を与えれば夫々，任意地点，任意時刻での流量 q，水深 h が数値積分することにより簡単に求まる。又各地点に於る流量，水深が最大値になる時刻を求める式は，(21)式をライプニッツの微分公式を使って t で微分すれば簡単に求まるがここでは省略する。

5. あとがき　紙面が不足のため式の誘導で終ったが，差分法に比し収束，安定は気にしなくて良いし，精度は数値積分の分点数の増加により保証される。問題は微少振幅理論の適用の妥当性であり，差分法との比較の計算例を講演当日発表する。

参考文献　1) Wilfried Brutsaert, "Review of Green's Functions for Linear Open Channel," Proc. ASCE, Vol. 99, No. EM6, DEC. '73.
2) Greenberg, M.D., Application of Green's Functions in Science and Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1971