II-163　任意の開水路における波動のＦＥＭ解析

川崎重工業　鉄構事業部　正員　坂井藤一
〃　○河合三四郎

1. まえがき

港湾や河川を伝播する波は、地形や水深の変化により複雑な挙動を呈する。このような波動を解析する方法としては、解析的手法および数値的手法がある。前者は、アナログ的情報を得るのに適しているが、限られた条件の場合にしか適用できない。任意に変化する地形・水深を考慮して解析を行なうには、数値的手法に依らざるを得ないが、その代表的なものは差分法（FDM）と有限要素法（FEM）である。

両者は従来異なる近似法とされ、それぞれ個有の特徴を有するが、筆者は[1)]この間に等価性を見出し、離散化手法の体系化を試みている。たとえば、著名な差分スキームたるLax-Wendroffスキームなども FEM の観点から導くことができるのである。一般的に FEM の特長はメッシュ分割の任意性と境界条件の処理の容易さにあり、したがって汎用プログラムの作成に便利であると考えられる。

先に、筆者は非定常波動問題に対する FEM 解析の一手法を示したが、[2),3)]ここでは定常問題に対する FEM 解析の手法と応用例を示す。本解析の結果と従来得られている解析および実験などの結果との比較によれば、極めて良好な一致が認められ、本解析手法の有効性が立証された。

2. ＦＥＭ定式化の基礎

次の定常波動式Helmhotz方程式を考えよう。

$$Y_{,ii} + K_i K_i Y = 0 \quad (i = 1,2,3,) \tag{1}$$

ここで、( ),i は座標Xi に関する偏微分、Ki は Xi 方向の波数を表わし、総和規約を用いている。また、波数Kと波数C、周期Tの間の関係は、

$$K^2 = \frac{4\pi^2}{C^2 T^2} = K_i K_i \tag{2}$$

今、次の変換により原式を書き替える。

$$Y_{,i} \mp K_i Y^c = 0 \tag{3}$$

$$Y^c_{,i} \pm K_i Y = 0 \tag{4}$$

これより、次の停留二乗原理を用いる。[4)] 汎関数は

$$J = \frac{1}{2}\int_V \left[(Y_{,i} \mp K_i Y^c)^2 - (Y^c_{,i} \pm K_i Y)^2 \right] DV$$
$$= \frac{1}{2}\int_V \left[Y_{,i} Y_{,i} - K^2 Y - (Y^c_{,i} Y^c_{,i} - K^2 Y^c) \right] DV$$
$$\mp \int_S N_i K_i Y Y^c DS \tag{5}$$

ここで、Ｖは解析領域、Ｓはその周辺境界である。ＮはＳにおける波の進行方向を表わし、複合はその方向が外向きか内向きかを表わす。

停留条件、　$\delta J = 0$ より、次の式が成り立つ。Euler方程式として、

$$Y_{,ii} + K^2 Y = 0 \qquad Y^c_{,ii} + K^2 Y^c = 0 \tag{6}$$

自然境界条件として、

$$\frac{\partial Y}{\partial N} \mp K Y^c = 0 \qquad \frac{\partial Y^c}{\partial N} \pm K Y = 0 \tag{7}$$

この自然条件は、無限遠において進行波のみ存在することをいうSommerfeldの放射法則に対応する。

$$\lim_{R \to \infty} R\left(\frac{\partial Y}{\partial R} + jKY \right) = 0 \tag{8}$$

Sommerfeldの条件を境界条件として、無限領域に伝播する波動のＦＥＭ解析に成功したのは、K, J, Bai[5)]である。条件（7）は物理的には特性インピーダンスの整合する場合（完全終端）に相当し、これは差分法の方で利用されている。[6)] しかし、境界条件の取扱いは、ＦＥＭの方が便利であろう。

汎関数(5)を基礎として、ＦＥＭのマトリックス式を誘導することができる。このプロセスは標準的に行なえばよい。このＦＥＭ定式化は一種のmixedmodelと呼ばれるものに属している。[11)]

3. 応用例

3 − 1　屈曲した水路おける津波の変形

津波（長波）が港湾・運河に侵入する時、屈曲形状の影響で生ずる変化を桃井[7]，Johns et al.[8]，堀川ら[9]は理論上、実験上において調べている。これらの結果とＦＥＭの結果はほとんど一致することが分った。

3 − 2　断面が不連続に変化する水路の波動伝播

水路巾が急変することによる波の挙動を岩崎ら[10]や桃井などが研究している。ここでは、岩崎の実験結果との対比を図に示した。

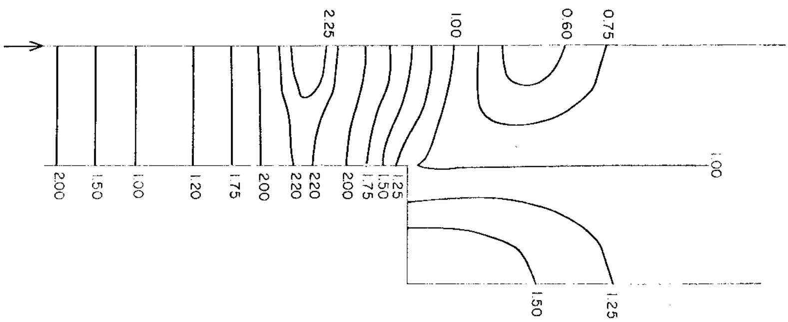
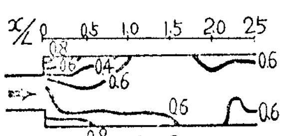


図 − 1　Wave Amplitude for D/d= 2.0 and kD=4.986



図−2

1) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集，第220号，1973

2) 坂井藤一・河合三四郎：有限要素法による表面波の数値解析，マトリックス構造解析シンポジウム論文集，日本鋼構造協会，1973−6

3) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用，第20 回海岸工学講演会論文集，1973

4) 坂井藤一・最小二乗変分原理に基づく有限要素法（その２），第29 回土木学会年次学術講演Ⅰ,1974

5) Kwang June Bai:AVariational Method in Potential Flows with a Free Surface, Univ. of California, 1972

6) 伊藤剛：非定常運動の境界条件について、水理講演会論文集，1974

7) 桃井高夫：L字水路における津波，地震研究所報告，1965

8) B.Johns and A.M. O.Hamzah:Long Standing Waves in a Curved Canal, J. Fluid Mech., 1968

9) 堀川清司・西村仁嗣：港湾の屈曲および断面変化に伴なう長波の変形，第20 回海岸工学講演会論文集，1973

10) 岩崎敏夫・島田真行：不連続境界場における表面波の伝播に関する研究，第21 回土木学会年次学術講演Ⅱ，1966

11) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピューターによる構造工学講座，培風館，1972