

北大工 正 員。長谷川和義  
北大工 学生員 長田 京司  
北大工 正 員 山岡 勲

### 1. 蛇行形状と川幅

一般に、大河川は大きな波長と小さな曲率を、小河川は小さな波長と大きな曲率をもって蛇行している。このような特徴を、統一的に把握するためには、規模の大小を比較できる適当なスケールが必要となるが、流量や、川幅などがこれにふさわしい。とくに川幅は、著者らのこれまでの調査から、卓越波長とほぼ比例関係にあることが知られており、また、図-1に示すように、曲率の分散と-2乗の関係にあるようなので、蛇行形状の代表スケールとしてすぐれた条件を備えている。ただし、図-1の川幅は、低水路幅の距離平均である。そこで、低水路中心線にそう河道距離を、低水路幅平均  $\bar{B}$  によって無次元化して  $x$  とし、これにそう蛇行曲率に  $\bar{B}$  を乗じて無次元曲率系列  $C(x)$  をつくると、各河川に共通な性質をもった系列が得られる。

### 2. 無次元曲率系列のスペクトル特性

図-2, 3, 4 は、各河川の無次元曲率に関するパワースペクトルを描いたものである。各河川は、三つの異なるパターンに分かれており、それぞれ、単一蛇行河川(図-2)、複列蛇行河川(図-3)、網状河川(図-4)に対応している。しかし、いずれも、無次元波数  $k=0.04$  あたりを中心波数とした、帯域通過過程の特徴がみられる。

### 3. 平衡曲率系列のモデル

自然状態にある河川は、長い間に弯曲 切離をくり返し、沖積平野を広い範囲にわたって変遷するので、どの位置をとっても、あらゆる可能な曲率値をとるものと考えられる。しかし、蛇行形状が流れのエネルギー損失と密接な関係をもっていることを考えると、まったく任意の形状をとることができるわけではない。すなわち、時どきにどのような形をとろうとも、エネルギー損失に関係する形状ファクターは、河川ごとに一定とな、ていなければならない。しかし、このファクターがいかなるものであるかは、今のところ知られていない。そこで  $C(x)$  の分散  $\sigma^2$  と、その単位距離あたりの微分量の分散  $\varepsilon^2$  が何らかの意味でエネルギー損失に関係し、保存量となっているものと仮定する。このように、 $C(x)$  の性質にワクをはめると、最もあらわれやすい  $C(x)$  の確率分布を得ることがができる。簡単のために、離散系列  $C(n)$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) を考え、また  $C(n)$  が  $i\delta C$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ ) なる離散量をとるものとし、全長  $N$  のうち  $N_i$  個が  $i\delta C$  なる値をとり、 $N_i$  のうち  $N_{ij}$  個が  $i\delta C$  の値をとった後に  $j\delta C$  なる値をとるものとすれば、仮定によって、

$$\frac{1}{N} \sum_{i=-M}^M (i\delta C)^2 N_i = \frac{1}{N} \sum_{j=-M}^M (j\delta C)^2 N_j = \sigma_*^2 (= \text{const.}) \quad (1)$$

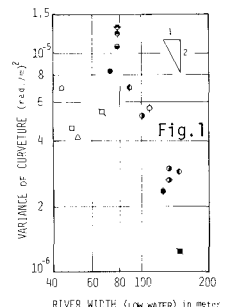
$$\frac{1}{N} \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \{(i-j)\delta C\}^2 N_{ij} = \varepsilon_*^2 (= \text{const.}) \quad (2)$$

また、一点において同時に二つの曲率値をとることはないから、

$$\sum_{i=-M}^M N_i = N \quad (3) \quad \sum_{i=-M}^M N_{ij} = N_j, \quad \sum_{j=-M}^M N_{ij} = N_i \quad (4)$$

が成立しなければならない。  $i\delta C$ ,  $(i-j)\delta C$  は、(1)~(4)の制限条件内で、任意の位置にあらわれることができるので、その続き方の違いによって状態を区別すれば、区別できる状態の数(微視状態の数)は、

$$t_N(N_{ij}) = N! / \prod_{ij} N_{ij}! \quad (5) \quad \text{だけある。ただし } N_{ij} \text{ の組は、制限(1)~(4)}$$



|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| ● SARU (1968)         | ● ABASHIRI Lower (1957) |
| ● MUKAWA (1967)       | ● TONACHI Lower (1956)  |
| ● ISHIKARI (1959)     |                         |
| ● ISHIKARI (1965)     | ○ TOKORO Upper (1954)   |
| ● TESHIO (1956)       | ○ ABASHIRI A11 (1968)   |
| ● URYU (1912)         | △ TOKACHI Upper (1967)  |
| ● URYU (1931)         | ○ GOSHITSUBETSU (1967)  |
| ● URYU (1947)         | △ NATORO (1967)         |
| ● TOKORO Lower (1956) | □ SATSUNAI (1967)       |

の範囲内にあるとする。もし、 $N_{ij}$  が異なれば異なった値をとるので微視状態の総数は、可能な  $N_{ij}$  のあらゆる組み合わせについて (5) を加えたものとなるが、全ての微視状態が、全て等しい確率をもって出現するものとするれば、(5) を最大にする  $N_{ij}$  の組のとり状態が最も起りやすく、これが平衡時の状態に対応している。(5) はそのまゝでは扱いにくいので対数を取り、 $X \gg 1$  において成立するスターリング公式  $\ln X! = X \ln X - X$  を用いて整理すると、 $\ln t = N \ln N - N - \sum_i \sum_j (N_{ij} \ln N_{ij} - N_{ij})$  (6)

したがって、平衡時の  $N_{ij}$  は、(1)~(4) の条件のもとで (6) を最大化するものとして得られる。以下ラグランジェ未定乗数法によってこれを求める。 $R \equiv N \ln N - \sum_i \sum_j (N_{ij} \ln N_{ij} - N_{ij}) + \alpha_1 \left\{ \frac{1}{N} \sum_i (i \delta C)^2 N_i - \sigma_x^2 \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{1}{N} \sum_j (j \delta C)^2 - \sigma_x^2 \right\} + \beta \left\{ \frac{1}{N} \sum_i \sum_j (i-j)^2 \delta C^2 N_{ij} - \epsilon_x^2 \right\} + \lambda \left( \sum_i N_i - N \right) + \sum_i \mu_i \left( \sum_j N_{ij} - N_i \right) + \sum_j \nu_j \left( \sum_i N_{ij} - N_j \right)$  (7) (ただし、 $\sum_i, \sum_j$  は、 $i, j$  について、 $-M$  から  $M$  までの和をとることを意味する。) を、 $N_i, N_j, N_{ij}$ 、未定乗数  $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda, \mu_i, \nu_j$  によって偏微分し、 $= 0$  において整理すれば、結果的に、

$$N_i = N \sum_j \exp \left\{ \beta (i-j)^2 \delta C^2 + \alpha_1 (i \delta C)^2 + \alpha_2 (j \delta C)^2 \right\} / F(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \equiv N_i^* \dots (8)$$

$$N_{ij} = N \exp \left\{ \beta (i-j)^2 \delta C^2 + \alpha_1 (i \delta C)^2 + \alpha_2 (j \delta C)^2 \right\} / F(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \equiv N_{ij}^* \dots (9)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \sum_i \sum_j \exp \left\{ \beta (i-j)^2 \delta C^2 + \alpha_1 (i \delta C)^2 + \alpha_2 (j \delta C)^2 \right\} \dots (10)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha \dots (11)$$

などが得られる。したがって、平衡時の  $C(n)$  の条件なしと条件付きの生起確率は、それぞれ、(8) を  $N$  で、(9) を  $N_i^*$  で割ったものとなる。やや困難ともなうが、(11) までの議論は  $C(n)$  を連続量としても同様に展開できることが古典統計力学などで明かにされている。そこで  $i \delta C$  を  $C_1$  とし、 $j \delta C$  を  $C_2$  として、連続密度を求めることにすれば、(8)~(10) の和は積分でおきかえられ、積分範囲は、曲率のとり得る最大値 (無次元曲率で 2 程度と考えられる) 内にとられる。しかし、最大値の近くで  $C(n)$  が存在する確率はもともと極めて小さいので、積分範囲を  $\pm \infty$  にまで広げても大差はない。無限積分によって得られる結果のみを記すと (12)~(14) となる。

$$P(C_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha(\alpha+2\beta)}}} \exp \left[ -\frac{C_1^2}{2 \left\{ -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha(\alpha+2\beta)} \right\}} \right], (\alpha < 0, \beta < 0) \dots (12)$$

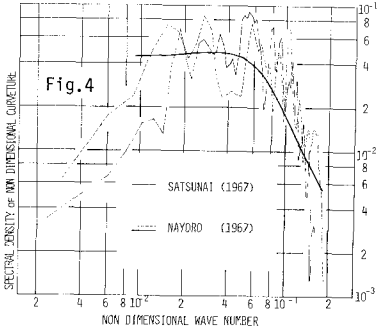
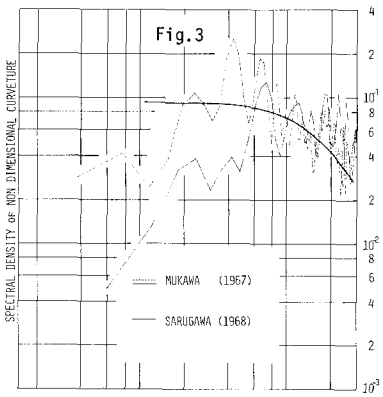
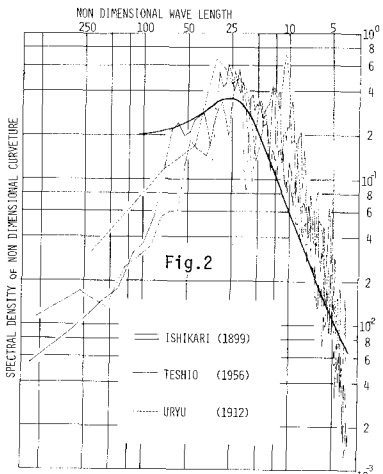
$$P(C_2|C_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}} \exp \left[ -\frac{(C_2 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} C_1)^2}{2 \left\{ -\frac{1}{2(\alpha+\beta)} \right\}} \right] \dots (13)$$

$$F(\alpha, \beta) = \pi / \sqrt{\alpha(\alpha+2\beta)} \dots (14)$$

ただし、 $P(C_1)$  は  $C(n)$  の条件なしの確率密度、 $P(C_2|C_1)$  は、 $C(n)$  の条件付き確率密度である。見られるように (12) はガウス分布であり、(13) も、 $C_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} C_1$  にピークをもつガウス分布であって、実測値の傾向をよくあらわしている。また、(11), (12) の関係から次の式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_1^2 P(C_1) dC_1 = -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha(\alpha+2\beta)} = \sigma_x^2 \dots (15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1 - C_2)^2 P(C_1) P(C_2|C_1) dC_1 dC_2 = -\frac{1}{\alpha+2\beta} = \epsilon_x^2$$

……(16) (12)~(16) によると、未定乗数  $\alpha, \beta$  は  $C(n)$  の確率分布の形を決めるパラメーターであるとともに、当初仮定した保存量  $\sigma_x^2, \epsilon_x^2$  に関係する量であることがわかる。実測の  $\sigma_x^2, \epsilon_x^2$  を用いれば、 $\alpha, \beta$  は実際に求ま



るが、問題はこれらの値が何を意味するかである。河道に与えられるエネルギーの割合の大小は、その河川の流域の傾き（河道平面こう配）によるであろう。そこで、 $i_T = (H_s - H_e) / L$  ..... (17) なる量を考え、 $-\alpha$ と $-\beta$ との関係を調べてみる。ただし、 $H_s$ 、 $H_e$ はそれぞれ、蛇行始点と終点における標高、 $L$ は始点と終点の間の直線距離である。図-5、6は、実測値によって得られた推定値 $-\hat{\alpha}$ 、 $-\hat{\beta}$ と $i_T$ の関係を示すものである。 $-\hat{\alpha}$ については一定の関係が認められず、 $-\hat{\beta}$ については、 $i_T = 2.5 \times 10^{-3}$ を境に、指数減少、指数増加の明瞭な関係が認められる。このことは、 $-\beta$ が、主としてエネルギー損失に関係するパラメーターであり、 $-\alpha$ が、主として地質など他の要因に関係して蛇行形状を規定するパラメーターであることを示唆している。この意味から、 $\alpha_x^2$ や $\beta_x^2$ は、エネルギー・バランスと地質的制約によって一定に保たれていると解釈しなおされる。

ところで、(6)がエントロピーと呼ばれることはよく知られている。そこで、(8)、(9)を(6)に代入し、連続量になおして整理した後、 $N$ で割ると

$$\frac{1}{N} \ln t = \ln F(\alpha, \beta) - \beta E_x^2 - 2\alpha \alpha_x^2 \equiv S_* \quad (18)$$

ただし、 $S_*$ は、平衡時の単位距離のもつエントロピー。(18)を移項して $\beta$ で割ると、 $E_x^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \alpha_x^2 + \frac{1}{\beta} S_* = \frac{1}{\beta} \ln F(\alpha, \beta) \equiv f_* \quad (19)$

当初、 $\alpha_x^2$ 、 $E_x^2$ を固定し、 $S_*$ を最大化したのであるから、 $f_*$ は極小となっているしなければならない。つまり、より一般的に平衡状態を表わす条件式は、 $E^2 - (-\frac{1}{\beta}) \cdot \{-(-2\alpha) \alpha_x^2 + S\} = f \rightarrow \text{極小} \quad (20)$  ということであって、このとき $E^2$ 、 $\alpha_x^2$ は、もはや固定して考える必要はない。(20)は、熱力学における自由エネルギーの定義式に対応しており、 $-\frac{1}{\beta}$ は温度に対応している。自然河川は、流域によって定まる $\alpha$ のもとで、もし $i_T$ が小、すなわち $-\frac{1}{\beta}$ が小なるときは、 $f$ を極小化させるために、 $E^2$ を小とする、すなわち規則正しく曲る傾向にあり、 $i_T$ が大、すなわち $-\frac{1}{\beta}$ が大になるにつれて $\{-(-2\alpha) \alpha_x^2 + S\}$ を大にする、すなわち不規則に曲る傾向にあると見られる。しかし $i_T$ が $2.5 \times 10^{-3}$ あたりを越え、 $i_T$ と $\beta$ の関係が逆転するので、逆に $E^2$ は減少しはじめる。これは、 $i_T$ が大となって不規則性が增大した結果、単一の河道を維持できなくなり網状化しはじめることによって $E^2$ が見かけ上小さくなることに対応していると考えられるが、さらに詳細な検討が必要である。 $E^2 = \{C(n) - C(n-1)\}^2$ と、 $i_T$ の関係を図-7に示す。

4. スペクトルのモデル

3. では断わらなかったが、任意の微分量 $\Delta C = C_2 - C_1$ が、任意の位置にあらわれ得るという仮定は、 $\Delta C$ が独立であることを前提としており、 $C(n)$ に一次マルコフの仮定を与えたことと同等である。したがってモデルによる自己相関関数は、 $R_{cc}(\xi) = R_{cc}(0) \cdot e^{-u\xi}$  なる形をとる。ただし $\xi$ はざらに距離、 $u$ は係数で、 $u = -\ln \frac{R_{cc}(1)}{R_{cc}(0)} = -\ln \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (21)$  にて与えられる。しかしこのときのスペクトルは、 $k=0$ にピークをもつので実際現象とあわない。そこで、 $R_{cc}(\xi) = R_{cc}(0) e^{-u\xi} \cos 2\pi k_p \xi \quad (22)$  を仮定する。このことは、3. のモデルと矛盾するようであるが、(22)に、 $\xi=1$ 、 $k_p=0.04$  を入れれば、 $R_{cc}(1) = R_{cc}(0) e^{-u} \cos 0.08\pi \approx R_{cc}(0) e^{-u}$  となり、 $R_{cc}(0)$ と $R_{cc}(1)$ のみが対象となっている3. の議論は十分成立する。(22)をフーリエ変換してスペクトルを求めると、 $S_{cc}(k) = R_{cc}(0) \cdot \left[ \frac{u}{u^2 + \{2\pi(k+k_p)\}^2} + \frac{u}{u^2 + \{2\pi(k-k_p)\}^2} \right] \quad (23)$  図-2、3、4に(23)の石狩川・名寄の例を太実線で示す。いずれも低波数域での不一致が大きく、(22)は検討の余地があるようである。

