

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
同 大学院 学生員 O尾崎幸男

1. まえがき：河床安定理論としての立場から、不定流の基本式を用いて河床に与えた微小擾乱の増幅率が河床の不安定性について解析した結果、河床はいかなる波長の微小擾乱に対しても常に不安定となった。この原因として考えられるのは、河床に与えた微小擾乱に対する他の水理量のもつ位相差である。河床の不安定性のため水流が蛇行し、ついには河川が蛇行すると考えられる。ここでは、さらに蛇行の卓越波長を求め実験値との比較を行なった。

2. 基本方程式：断面は矩形断面とし、静水圧分布を仮定し、さらに鉛直面内の速度変化を無視すれば、基本式は次のようになる。

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = I_0 - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\gamma z} \quad (1) \quad \frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{V \tau_0}{U \gamma z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (Uz) + \frac{\partial}{\partial y} (Vz) + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (3) \quad \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} + (1-n) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

ここに、 τ_0 ：河床に働く剪断力、 γ ：水の単位体積重量、

q_{sx} ：x方向への流砂量、 q_{sy} ：y方向への流砂量、 n ：空隙率。

(1)~(4)式にある未知量は、 U 、 V 、 h 、 z 、 τ_0 、 q_{sx} 、 q_{sy} の7個である。従ってあと3個の式が必要となり、それを次のようにとる。

$$\frac{\tau_0}{\gamma z} = \frac{U^2}{g z (6.0 + 2.5 \ln \frac{z}{k})^2} \quad (5) \quad \Phi_{sx} = f(\Phi) \quad (6) \quad q_{sy} = \frac{V}{U} q_{sx} \quad (7)$$

ここに、 $\Phi_{sx} = \frac{q_{sx} \cdot s}{\sqrt{g(s-1)} \cdot F \cdot d^2}$ 、 $F = \sqrt{\frac{z}{3} + \frac{3.6 U^2}{g d^3 (s-1)}} = \sqrt{\frac{3.6 U^2}{g d^3 (s-1)}}$ 、 d ：砂の粒径、

ν ：水の動粘性係数、 s ：砂の比重、 $\Phi = \frac{\tau_0}{\gamma(s-1)d}$ 、 k ：相当粗度。

(5)~(7)式を(1)~(4)式に代入し、 $h = \bar{h}$ 、 $z = D + z'$ 、 $U = \bar{U} + u'$ 、 $V = \bar{V} + v'$ と置き、さらに座標軸、時間並びに微小変動量（プライムの付いた量）を以下のようにして無次元化すると(8)~(11)式が得られる。

[無次元化] 座標軸： $\xi = \frac{x}{D}$ 、 $\eta = \frac{y}{D}$ 、 $\zeta = \frac{z}{D}$ 、時間： $\tau = \frac{t \bar{U}}{D}$ 、

変動量： $u'_r = \frac{u'}{\bar{U}}$ 、 $v'_r = \frac{v'}{\bar{V}}$ 、 $h'_r = \frac{h'}{\bar{h}}$ 、 $z'_r = \frac{z'}{D}$ 。

$$F_r^2 \left(\frac{\partial u'_r}{\partial \tau} + \frac{\partial u'_r}{\partial \xi} \right) = - \frac{\partial h'_r}{\partial \xi} - \frac{\partial z'_r}{\partial \xi} - I_0 \{ 2u'_r - (1+A_1)z'_r \} \quad (8) \quad F_r^2 \left(\frac{\partial v'_r}{\partial \tau} + \frac{\partial v'_r}{\partial \eta} \right) = - \frac{\partial h'_r}{\partial \eta} - \frac{\partial z'_r}{\partial \eta} - I_0 v'_r \quad (9)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial \xi} + \frac{\partial z'_r}{\partial \xi} + \frac{\partial v'_r}{\partial \eta} + \frac{\partial z'_r}{\partial \tau} = 0 \quad (10) \quad 2F_r^2 f(\Phi_0) \frac{\partial u'_r}{\partial \xi} - A_1 \Phi_0 f(\Phi_0) \frac{\partial z'_r}{\partial \xi} + f(\Phi_0) \frac{\partial u'_r}{\partial \tau} + A_2 \frac{\partial h'_r}{\partial \tau} = 0 \quad (11)$$

ここに、 $F_r = \frac{\bar{U}}{\sqrt{gD}}$ 、 $\frac{\bar{U}_0}{\sqrt{gD I_0}} = 6.0 + 2.5 \ln \frac{D}{k}$ 、 $A_1 = 5.0 \frac{I_0}{F_r}$ 、

$A_2 = \frac{(1-n) \bar{U}_0 D \cdot s}{\sqrt{g(s-1)} \cdot F \cdot d^2}$ 、 $\Phi_0 = \frac{D I_0}{(s-1)d}$ 、 $f(\Phi_0) = \frac{d}{\Phi_0}$ 。

3. 微小変動量の仮定：河床に与える擾乱を $h_r = h_0(\eta) \exp[ik_r(\xi - \tau)]$ とすれば、

他の微小変動量は h_r に対してある位相差を持つであらうと考え、それら z'_r 、 u'_r 、 v'_r を $z_r = z_0(\eta) \exp[ik_r(\xi - \tau) + i\phi_z]$ 、 $u_r = u_0(\eta) \exp[ik_r(\xi - \tau) + i\phi_u]$ 、 $v_r = v_0(\eta) \exp[ik_r(\xi - \tau) + i\phi_v]$ のように仮定する。

但し、 h_0 、 z_0 、 u_0 、 v_0 は η についての関数で η 方向への位相差を含む。又、 $k_r = \frac{2\pi D}{\lambda}$ ：無次元波数、

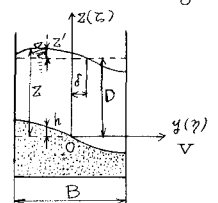
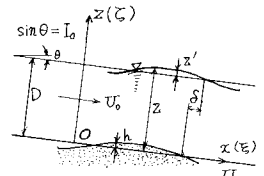
$C_r = \frac{C}{\bar{U}_0} = (C_{Rr} + iC_{I1})$ ：無次元複素波速、 ϕ_u 、 ϕ_z 、 ϕ_v ： ξ 方向の位相差、 $i = \sqrt{-1}$ 。

これらの微小変動量を(8)~(11)式に代入して(12)~(15)式を得る。

$$iX_0 + \{i - (1+A_1)\frac{I_0}{F_r}\}X_1 + \{iF_r^2(1-C_r) + 2\frac{I_0}{F_r}\}X_2 = 0 \quad (12) \quad \{iF_r^2(1-C_r) + \frac{I_0}{F_r}\}X_3 = -\frac{1}{k_r}(X'_0 + X'_1) \quad (13)$$

$$(1-C_r)X_1 + X_2 = \frac{i}{k_r}X'_0 \quad (14) \quad -A_2 C_r X_0 - A_1 \Phi_0 f(\Phi_0)X_1 + 2\Phi_0 f(\Phi_0)X_2 = \frac{i}{k_r}f(\Phi_0)X'_0 \quad (15)$$

ここに、 $X_0 = h_0$ 、 $X'_0 = \frac{dh_0}{d\eta}$ 、 $X_1 = z_0 e^{i\phi_z}$ 、 $X'_1 = \frac{dz_0}{d\eta} e^{i\phi_z}$ 、 $X_2 = u_0 e^{i\phi_u}$ 、 $X'_2 = \frac{du_0}{d\eta} e^{i\phi_u}$ 、 $X_3 = v_0 e^{i\phi_v}$ 、 $X'_3 = \frac{dv_0}{d\eta} e^{i\phi_v}$ 。



I_0 ：平衡状態に於ける
水面勾配

δ ：位相差

$\bar{U}_0$ ：平均流速

U ：x方向の流速

V ：y方向の流速

D ：平均水深

z ：場所的水深

z' ：水面変動

h ：河床に与える擾乱

B ：河川幅

$G_r \ll 1$ と考えて (12), (14), (15) 式から X_0, X_1 を求めると,

$$X_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \lambda_1 X_3', \quad X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lambda_2 X_3' \dots (16) \quad \text{となる。}$$

(16) 式を (13) 式に代入して

$$X_3'' + \lambda_3 X_3 = 0 \quad \text{即ち} \quad v_0'' + \lambda_3 v_0 = 0 \dots (17)$$

$$\text{ここに, } v_0'' = \frac{d^2 v_0}{d\eta^2},$$

$$\lambda_3 = \frac{k_r \{i F_r^2 + \frac{I_0}{k_r}\}}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{k_r^2 \{i F_r^2 + \frac{I_0}{k_r}\} \{ (3+A_1) A_2 \frac{I_0}{k_r} C_r + i^2 (F_r^2 - 1) A_2 C_r + (2+A_1) f_0 f'(f_0) \}}{-A_1 F_r^2 C_r + F_r^2 f'(f_0) + A_1 f_0 f'(f_0) - i^2 \frac{I_0}{k_r} \{ (3+A_1) f'(f_0) - 2 f_0 f'(f_0) - 2 A_2 C_r \}} \dots (18)$$

(17) 式を境界条件: $\eta = \pm \frac{B}{2D}$ に於いて $v_0 = 0$ のもとに解くと, $\Delta_1 = \frac{i}{k_r} X_3'$

(このためには $\operatorname{Re} \lambda_3 > 0, \operatorname{Im} \lambda_3 = 0$ となる必要がある。)

$$v_0 = v \cos \sqrt{\lambda_3} \eta = v \cos \frac{m\pi D}{B} \eta \dots (19) \quad (m=1, 2, \dots), \quad (19) \text{ 式から } \lambda_3 = \left(\frac{m\pi D}{B} \right)^2 = k_r \lambda \dots (20)$$

(20) 式及び $C_r = C_{rR} + i C_{rI}$ を (18) 式に代入して整理すると (21) 式が得られる。

$$a_{11} C_{rR} + a_{12} C_{rI} = b_1, \quad a_{21} C_{rR} + a_{22} C_{rI} = b_2 \dots (21)$$

$$\text{但し, } a_{11} = -a_{22} = \lambda A_2 F_r^2 \left\{ 1 + \frac{3+A_1}{\lambda F_r^2} \left(\frac{I_0}{k_r} \right)^2 - \frac{F_r^2 - 1}{\lambda} \right\}, \quad a_{12} = a_{21} = 2 \lambda A_2 \frac{I_0}{k_r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{(4+A_1) F_r^2}{\lambda} + \frac{1}{2 \lambda} \right\},$$

$$b_1 = \lambda F_r^2 \{ f'(f_0) + A_1 f_0 f'(f_0) \} + (2+A_1) F_r^2 f_0 f'(f_0), \quad b_2 = \lambda \frac{I_0}{k_r} \{ (3+A_1) f'(f_0) - 2 f_0 f'(f_0) \} + (2+A_1) \frac{I_0}{k_r} f_0 f'(f_0).$$

4. 河床の安定・不安定: 河床の安定は $G_r < 0$ で与えられる。 $(C_{rI} = 0$ のときは中立。) そこで (21) 式から C_{rI} を求めて河床の安定性を検討しよう。式の簡単化のため次の3個の仮定を設ける。

$$\frac{2 F_r^2}{\lambda} \ll 1, \quad \frac{2}{\lambda A_1} \ll 1, \quad \frac{3+A_1}{\lambda F_r^2} \left(\frac{I_0}{k_r} \right)^2 \ll 1 \quad (A_1 \text{ は } 1.0 \text{ 前後の値ととる。})$$

以上の仮定の許に G_r は (22) 式のように表わすことが出来る。

$$C_{rI} = \frac{a_{12} b_1 - a_{11} b_2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{1+A_1}{A_2} \left\{ 2 f_0 f'(f_0) - f'(f_0) \right\} \frac{I_0}{F_r^2} \frac{1}{1 + \left(2 \frac{I_0}{F_r^2} \frac{1}{k_r} \right)^2} \dots (22)$$

ここで $f(f_0) = 40 f_0^3$ なる関係式を代入すると $C_{rI} = \frac{20(1+A_1) f_0^3}{A_2} \frac{I_0}{F_r^2} \frac{1}{1 + \left(2 \frac{I_0}{F_r^2} \frac{1}{k_r} \right)^2}$ となり C_{rI} は常に正即ち河床はいかなる波長の微小擾乱に対しても不安定となることを示す。

5. 卓越蛇行波長と実験値との比較: G_r の値を最大にするような波長の河床変動が卓越すると考えて, C_{rI} を極大にする無次元化した蛇行波長 $\frac{L}{D}$ を $\frac{d(C_{rI})}{d(f_0)} = 0$ の条件から求めると $I_0 \frac{1}{k_r} = \frac{F_r^2}{2}$ となりこれに $\frac{1}{k_r} = \frac{\Delta}{2\pi D}$ を代入して $\frac{L I_0}{D} = \pi F_r^2 \dots (23)$ が得られる。(23) 式と実験値とを比較したのが下の図である。

ここに, L : 卓越蛇行波長, D : 平均水深, I_0 : 平衡状態に於ける水面勾配, F_r : フルード数。

参考文献:

- 1) Hansen, E.: On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Report No. 13 Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark, 1967.
- 2) Callander, R.A.: Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, part 3, 1969.
- 3) Rouse, H.: Engineering Hydraulics, John Wiley & Sons, pp 786-804, 1949.
- 4) Chang, H.Y., Simons, D.B. and Woolhiser, D.A.: Flume experiments on alternating bar formation, Journal of WW Div., Proc. ASCE, Feb. 1971, pp. 155-165.
- 5) 木下隆作: 石狩川河道変遷調査-参考編-科学技術庁資源局資料, 第36号, 1961.
- 6) 林泰造: 蛇行論, 水工学21-270-16(特別号), 土木学会水理委員会, 1970年8月。

附記:

本研究の遂行に当りては, 昭和48年度文部省科学研究費総合研究(研究代表者: 岸力教授)の補助をうけた。記して謝意を表する。

