

1. まえがき

本報は、自由地下水面をもち、水平方向に無限の、均一な透水性の浸透層中に、円形暗きよを1個埋設して取水する場合を考え、Hodograph法を用いて解析により暗きよ取水量の厳密解を求め、これを Hele-Shawモデル実験によって検証し、さらに従来の近似解による算定結果と比較したものである。

2. Hodograph法による解析¹⁾

x, y 方向の流速をそれぞれ u, v とするとき $U = u - iv \dots (1)$ を表わされる平面 (ホドグラフ平面: 図-2) を考えると、自由地下水面は $u^2 + (v + R/2)^2 = R^2/4 \dots (2)$ の円を表わされ、これを $R/U = U' = u' + iv' \dots (3)$ で写像すると、式-2は $v' = -1$ となる。すなわち自由地下水面を直線と表わす図-3をうる。さらに図-3は Schwarz-Christoffelの変換により図-4に写像できる。このとき写像関数は次式で表わされる。

$$U' = M \left(\frac{\xi(\xi-m)}{\xi(\xi-n)(\xi-1)} \right) d\xi = \frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ \sqrt{\xi-n} - \frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{\xi-n}} - \frac{1-m}{2\sqrt{(1-n)^3}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\xi-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\xi-n}} \right| \right\} - i \dots (4)$$

==に図-4の流は流入流出点間のポテンシャル流であり、複素ポテンシャル式は

$$W = \Phi + i\Psi = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{\xi-a}{\xi-1} \right| \cdot \frac{n-1}{n-a} + R H_E \dots (5)$$

次に $U = -dW/dz$ と式-3より $\frac{dz}{d\xi} = -\frac{U'}{R} \frac{dW}{d\xi}$ であり、これに式-4, 5を代入すると

$$z = \frac{Q}{2\pi R} \left(\frac{1-a}{(\xi-a)(\xi-1)} \right) \left\{ \frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ \sqrt{\xi-n} - \frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{\xi-n}} + \frac{m-1}{2\sqrt{(1-n)^3}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\xi-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\xi-n}} \right| \right\} - i \right\} d\xi \dots (6)$$

をうる。この式-6を式-5と連立させれば、 ξ 平面を媒介として z 平面と W 平面の対応がつかうから、図-1の流れを解くことが出来る。

3. 自由地下水面と暗きよ取水量の算定式

式-5, 6に各点の境界条件を与えて、自由地下水面形状および暗きよ取水量の算定式を導いてみよう。まず自由地下水面上の任意の位置 $N(\xi=\gamma)$ を考え、式-6を $n \leq \xi \leq \gamma$ の区間で積分すると、実数部と虚数部より

$$-x = \frac{Q}{2\pi R} \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ 2\sqrt{\gamma-n} + \frac{2n(m-n)}{(1-n)\sqrt{\gamma-n}} \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\gamma-n}{n-a} \right| + \left\{ \frac{n(m-n)}{(1-n)^3} - \sqrt{1-n} \right\} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\gamma-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\gamma-n}} \right| \right\} + \frac{Q}{2\pi R} \frac{1-a}{\pi} \int_n^\gamma \frac{1}{(\xi-a)(\xi-1)} \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\xi-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\xi-n}} \right| d\xi \dots (7)$$

$$y = \frac{Q}{2\pi R} \ln \left| \frac{\gamma-a}{\gamma-1} \right| \cdot \frac{n-1}{n-a} + H_E \dots (8)$$

得られる。すなわち式-7, 8は自由地下水面形状の算定式である。

また式-8に $y = H_0$ とおいてえられる γ の値を γ_c とすれば、この

値を式-7に代入して求まる x の値は、自由地下水面がもとの地下水

面に回復するまでの距離 R である。次に地下水面の最低点 $E(\xi=n > a)$ については、 $z(E) - z(D) = i H_E$ である

から、式-6を $-\infty \leq \xi \leq n$ の区間で、特異点 $A(\xi=a)$ を含む積分を行なうと、実数部と虚数部から、

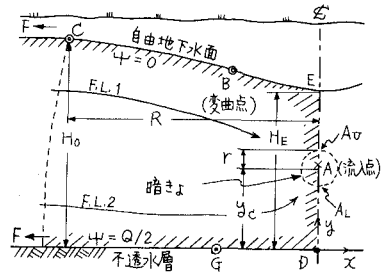


図-1 z平面

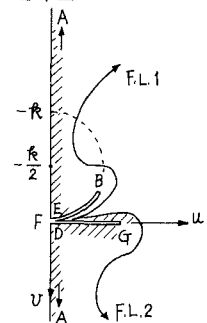


図-2 U平面

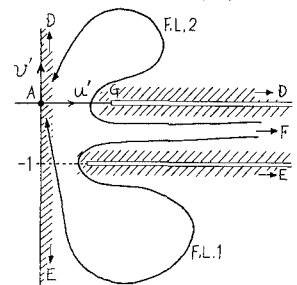


図-3 U'平面

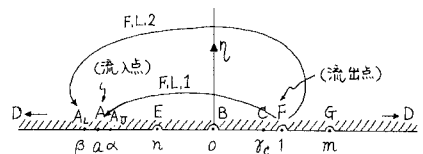


図-4 xi平面

$$\frac{2\sqrt{(1-n)^3}}{m-1} \left\{ \sqrt{n-a} + \frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}} \right\} + 2 \tan^{-1} \frac{n-a}{1-n} - \pi = 0 \quad \dots (9) \quad H_E = \frac{Q}{\pi R} \left\{ \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{m-1} \left\{ \sqrt{1-n} - \frac{n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}} \right\} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-a}{n-a} \right| \right\} \quad \dots (10)$$

次に暗きと周壁の下端AL ($y=y_c-r$, $\xi=\beta < a$) の場合、 $-\infty \leq \xi \leq \beta$ の区間で積分すると

$$y_c-r = \frac{Q}{\pi R} \left\{ \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ (2\sqrt{1-n} - \frac{2n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}) \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{n-\beta}{1-n} \right) + \left(\sqrt{n-a} + \frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}} \right) \ln \left| \frac{\sqrt{n-a} + \sqrt{n-\beta}}{\sqrt{n-a} - \sqrt{n-\beta}} \right| \right\} + \frac{1-a}{\pi} \int_0^{\frac{1/\sqrt{1-n}}{2 \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1-n}})}} \frac{2t \cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1-n}})}{\{(n-a)t^2-1\} \{(1-n)t^2+1\}} dt \right\} \quad \dots (11)$$

$$\text{また } \Phi = R H_A \text{ であることより } R H_A = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{\beta-a}{\beta-1} \frac{n-1}{n-a} \right| + R H_E \quad \dots (12)$$

暗きと内が満水状態のときは、暗きと周壁の上端をAU点 ($y=y_c+r$, $\xi=\alpha > a$, $\Phi = R H_A$) と考えると

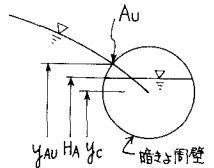
$$y_c+r = H_E - \frac{Q}{\pi R} \left\{ \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ (2\sqrt{1-n} - \frac{2n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}}) \tan^{-1} \frac{n-a}{1-n} - \left(\sqrt{n-a} + \frac{n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}} \right) \ln \left| \frac{\sqrt{n-a} + \sqrt{n-a}}{\sqrt{n-a} - \sqrt{n-a}} \right| \right\} + \frac{1-a}{\pi} \int_0^{\frac{1/\sqrt{1-n}}{2 \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1-n}})}} \frac{2t \cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1-n}})}{(n-a)t^2(1-n+t^2)} dt \right\} \quad \dots (13)$$

$$R H_A = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{\alpha-a}{\alpha-1} \frac{n-1}{n-a} \right| + R H_E \quad \text{と式-12と連立させて } \alpha = \{ 2a - (1+a)\beta \} / (1+a-2\beta) \quad \dots (14)$$

つまり、すなわち式-7 ($\xi=y_c$)、式-8 ($\xi=y_c$)、式-9~14 の8式で、暗きと内が満水状態の場合の暗きと取水量の算定式である。また暗きと内が本満水状態のときは、暗きと周壁と地下水面の交点 ($x = -\sqrt{r^2 - (y_{AU} - y_c)^2}$, $y = y_{AU}$) とAU点と考えると ($n < \alpha < 1$)、

$$y_{AU} - H_E = \frac{Q}{2\pi R} \ln \left| \frac{n-1}{n-a} \frac{\alpha-a}{\alpha-1} \right| \quad \dots (15)$$

図-5 本満水円形暗きと



$$-\sqrt{r^2 - (y_{AU} - y_c)^2} = \frac{Q}{\pi R} \left\{ \frac{\sqrt{(1-n)^3}}{(m-1)\pi} \left\{ 2\sqrt{n-a} + \frac{2n(m-n)}{(1-n)\sqrt{n-a}} \right\} \tan^{-1} \frac{\alpha-n}{1-n} + \left\{ \frac{n(m-n)}{\sqrt{(1-n)^3}} - \sqrt{1-n} \right\} \ln \left| \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{\alpha-n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{\alpha-n}} \right| \right\} + \frac{Q}{2\pi R} \frac{1-a}{\pi} \int_0^{\frac{1/\sqrt{1-n}}{(5-a)(\xi-1)}} \frac{1}{\ln \left| \frac{1-n+\xi-n}{1-n-\xi-n} \right|} d\xi \quad \dots (16)$$

すなわち式-7 ($\xi=y_c$)、式-8 ($\xi=y_c$)、式-9~12、式-15、16 の8式で暗きと取水量の算定式であり、これら8式にR以外の境界条件 (H_0, r, y_c, H_A) を与えて $n=0$, $y_{AU} = H_A$ について解いたときのRの値を R_0 とおくと、境界条件として与えられたRの値が $R < R_0$ であれば $n=0$ とおき、 $R > R_0$ であれば $y_{AU} = H_A$ において再び8式を解くことにより、暗きと内が本満水状態の場合の暗きと取水量がえられる。

4. Helle-Shawモデル実験結果および従来の算定式による算定結果との比較

$$\text{従来の算定式として次の4式があり、} \quad Q_D = R(H_0^2 - H_A^2)/R \quad \dots (17) \quad \{\text{式-18: } t = \{H_A - (y_c - r)\}\}$$

$$Q_F = R(H_0^2 - H_A^2)/R \cdot \sqrt{(1 \pm 0.5r)/H_A} \cdot \sqrt{(2H_A - t)/H_A} \quad \dots (18) \quad Q_{R1} = \pi R(H_0 - H_A) / \{ \ln(y_c/4\pi r) + \pi R/2y_c \} \quad \dots (19)$$

$$Q_{R2} = \pi R(H_0 - H_A) / \{ \ln(y_c/\pi r) + \pi R/2y_c \} + R \{ (H_0 - y_c)^2 - (H_A - y_c)^2 \} / R \quad \dots (20)$$

図-8から、式によって、あるいは境界条件によって、かなり大きな近似算定誤差を生ずることがわかる。

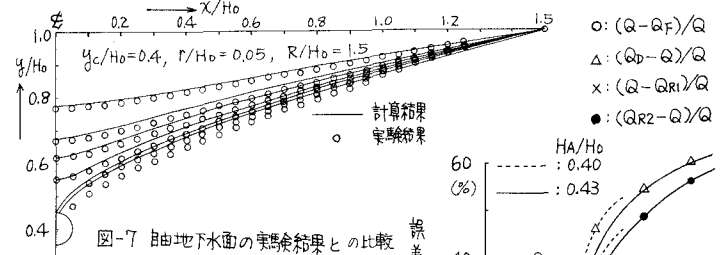
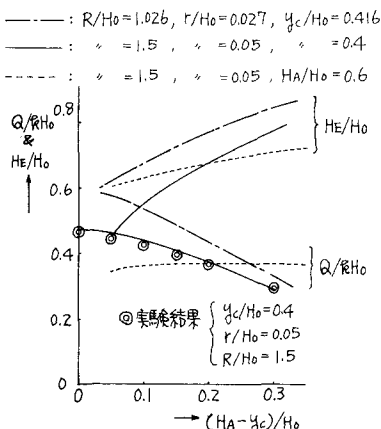


図-6 自由地下水面の最近点の高さ、暗きと取水量の境界条件による変化および暗きと取水量の実験結果との比較

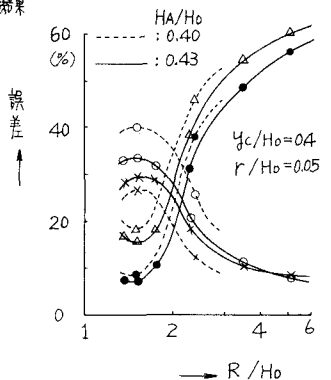


図-8 近似算定式の誤差

参考文献 1) Schiffgaard, Kirkham & Frevert, Physical and Mathematical Theories of Tile and Ditch Drainage And Their Usefulness in Design, Research Bulletin Agric. Exper. Stat., Ames, Iowa 476, P.P. 681~PP.683, Feb., 1956. 2) 杉尾, 自由地下水面をもつ無阻領域内円形暗きと取水量について, 土木学会論文報告集 208号, PP.45. 1972年12月.