

まえがき 底勾配をもった滞水層における自由地下水の運動を、降雨のような領域的に一様な流入強度とか、井戸からの揚水のような特定点からの汲み揚げ量とかを考慮して（一次元および二次元に、また定常および非定常的に、差分式によって）数値計算する手法を述べ、2-3の解析解と対比して適合性を検定した。

1. 数値計算手法の骨子 1-1. X-Y平面の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{連続式 } \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= R \cdots \cdots (1) \\ \text{運動式 } u_x &= -k \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad u_y = -k \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \cdots \cdots (2) \\ \text{但し } \tilde{h}_x &= Z_0 - i_x x + h \quad \tilde{h}_y = Z_0 - i_y y + h \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda; & \text{空隙率, } h; \text{水深, } u; \text{流速, } R; \text{流入強度} \\ k; & \text{透水係数, } \tilde{h}; \text{水頭, } Z_0; \text{不透水層の基床高} \\ i; & \text{不透水層の底勾配} \end{aligned}$$

いま、(3)式を使って(2)式を变形し、(1)式に代入して整理すれば、(4)式がえられる。

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = R + k \cdot [h \cdot \{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\} + \{(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2\} - \{i_x \frac{\partial h}{\partial x} + i_y \frac{\partial h}{\partial y}\}] \cdots \cdots (4)$$

実際計算には、クラנק・ニコルソンによる陰差分を使うことにし、X, Y, Tをそれぞれx, y, tのカウンターとして

$$\begin{aligned} h(X, Y, T+1) &= B_i \quad h(X+1, Y, T+1) = C_{ix} \quad h(X-1, Y, T+1) = A_{ix} \quad h(X, Y+1, T+1) = C_{iy} \quad h(X, Y-1, T+1) = A_{iy} \\ h(X, Y, T) &= B_M \quad h(X+1, Y, T) = C_{MX} \quad h(X-1, Y, T) = A_{MX} \quad h(X, Y+1, T) = C_{MY} \quad h(X, Y-1, T) = A_{MY} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (B_i - B_M) / \Delta t \\ &= R + \frac{k}{2} \left[B_M (C_{MX} - 2B_M + A_{MX}) / \Delta x^2 + B_i (C_{ix} - 2B_i + A_{ix}) / \Delta x^2 + B_M (C_{MY} - 2B_M + A_{MY}) / \Delta y^2 + B_i (C_{iy} - 2B_i + A_{iy}) / \Delta y^2 \right. \\ & \quad \left. + \{(C_{MX} - A_{MX}) / (2\Delta x)\}^2 + \{(C_{ix} - A_{ix}) / (2\Delta x)\}^2 + \{(C_{MY} - A_{MY}) / (2\Delta y)\}^2 + \{(C_{iy} - A_{iy}) / (2\Delta y)\}^2 \right. \\ & \quad \left. - i_x (C_{MX} + A_{MX}) / (2\Delta x) - i_x (C_{ix} + A_{ix}) / (2\Delta x) - i_y (C_{MY} + A_{MY}) / (2\Delta y) - i_y (C_{iy} + A_{iy}) / (2\Delta y) \right] \cdots \cdots (4') \end{aligned}$$

のように差分化し、ガウス・ザイデル反復法によることにし、上の実線で囲まれた部分をXY_{mi}とおき、B_iの2次式 $k \cdot (1/2\Delta x^2 + 1/2\Delta y^2) B_i^2 - \{ \{ (A_{ix} + C_{ix}) / \Delta x^2 + (A_{iy} + C_{iy}) / \Delta y^2 \}^{1/2} - \lambda / \Delta t \} B_i - (R + B_M \lambda / \Delta t + X Y_{mi} \cdot k / 2) = 0$ に整理してオ1項の係数をA, オ2項の係数をB, オ3項をCとおいて、 $B_i = (B + \sqrt{B^2 + 4AC}) / (2A) \cdots \cdots (5)$ を得る。この反復計算は急速に収束し、安定な値を与える。収束過程は振動的でなく一様な減衰曲線的である。

1-2. X-Z平面の場合 鉛直な平面内で速度ポテンシャルφを水頭換算したもので表わし、φ = P + Zとして連続式・運動式を計算すれば(4)式と同じ形になって、ただhとP(水頭換算した水圧)、i_xと0、i_yと-1、YとZなどをそれぞれ入れ替えたものになるから、1-1と同じ手法で計算できる。

1-3. 定常状態の場合 定常状態の基本式は、(4)式の左辺を0としたものであるから、(4')式で便宜的にλに0を与えれば、あとは1-1と同じ手法となる。

2. 検定 2-1 1次元の場合

a) 高木解による検定 高木式は、全区間長をL

$$h(0, 0) = h_0 \quad h(L, 0) = h_c \quad \text{の条件のもとに、}$$

$$h(x, t) = \{h_0 - (h_0 - h_c) \cdot x^2 / L^2\} / (1 + B_T \cdot t)$$

$$\text{ここに } B_T = 2k \cdot (h_0 - h_c) / (\lambda \cdot L^2) \quad \text{であるから、}$$

この数値解法(以下モデルとよぶ)を検定するため、これに

$$\text{初期条件 } h(x, 0) = h_0 - (h_0 - h_c) \cdot x^2 / L^2$$

$$\text{始端条件 } h(0, t) = h(2\Delta x, t) \quad (\text{折り返えし})$$

$$\text{終端条件 } h(L, t) = h_c \{1 + (2k/\lambda) \cdot (h_0 - h_c) \cdot t / L^2\}^{-1}$$

を与えて計算したものと、解析解とを比較して表-1に掲げた。高木式は(4)式を1次元で扱い、R, i_xを0とした基本式にたち、さらに(∂h/∂x)²の項を省いているから、モデルでもこれを省いて「省略モデル」とした。

表-1 高木式による検定 $K=8.64 \text{ m/day}$ $\lambda=0.3$ $\Delta x=20 \text{ m}$
 $h_0=5 \text{ m}$ $h_c=2.5 \text{ m}$

時刻(t) / 距離(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	5.00	4.97	4.88	4.72	4.51	4.23	3.89	3.49	3.02	2.50
10	高木式	4.79	4.76	4.67	4.52	4.31	4.05	3.72	3.34	2.90
	省略モデル	4.80	4.76	4.67	4.52	4.32	4.05	3.72	3.34	2.90
	全項E/F%	4.81	4.77	4.69	4.55	4.36	4.11	3.81	3.43	2.98
20	高木式	4.59	4.56	4.48	4.34	4.14	3.89	3.57	3.20	2.78
	省略モデル	4.61	4.57	4.49	4.34	4.14	3.89	3.57	3.21	2.78
	全項E/F%	4.63	4.60	4.53	4.40	4.22	3.99	3.70	3.34	2.89
30	高木式	4.41	4.38	4.30	4.17	3.98	3.73	3.43	3.08	2.67
	省略モデル	4.43	4.40	4.31	4.17	3.98	3.74	3.44	3.08	2.67
	全項E/F%	4.45	4.45	4.38	4.26	4.09	3.97	3.59	3.24	2.80
40	高木式	4.25	4.22	4.14	4.01	3.83	3.59	3.30	2.96	2.57
	省略モデル	4.26	4.23	4.15	4.02	3.83	3.60	3.31	2.97	2.57
	全項E/F%	4.34	4.31	4.24	4.13	3.97	3.75	3.48	3.14	2.70
50	高木式	4.09	4.07	3.99	3.86	3.69	3.46	3.18	2.85	2.47
	省略モデル	4.11	4.08	4.00	3.87	3.70	3.47	3.19	2.86	2.48
	全項E/F%	4.21	4.18	4.12	4.01	3.85	3.64	3.38	3.04	2.61

b) 尾島条件による検定 第28回年次学術講演会で尾島氏が、実験対象として扱われたような、始端水位が時間的にステップ上昇(H_1)するとき、即ち

$h(0,t)_{t>0} = h(0,0) + H_1$
の条件のもとで初期水面から

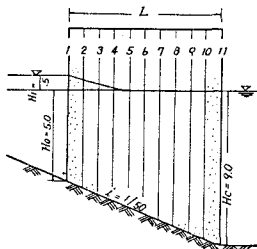


表-2 尾島条件による検定

断面	断面1	断面2	断面3	断面4	断面5	断面6
時刻	時刻	時刻	時刻	時刻	時刻	時刻
0	5.00	5.40	5.40	5.80	5.80	5.80
1	5.50	5.56	5.54	5.83	5.81	5.82
2	*	5.62	5.61	5.87	5.85	5.86
3	*	5.65	5.65	5.90	5.88	5.90
4	*	5.67	5.67	5.93	5.91	5.93
5	*	5.68	5.69	5.94	5.93	5.96
10	*	5.72	5.73	5.76	5.99	5.99
20	*	5.75	5.75	5.80	6.03	6.02
30	*	5.76	5.76	5.81	6.05	6.03
40	*	5.76	5.76	5.82	6.06	6.03
50	*	5.77	5.76	5.83	6.06	6.04

の増水位 $DH(x,t) = H_1 \text{Exp}(-ix/2) \sum_{n=0}^{\infty} [\text{Cerf}(\mu_1) - \text{Cerf}(\mu_2)]$ (ここに $\mu_1 = (2nL + x)/(2\sqrt{hcK/R})$, $\mu_2 = \{2(m+1)L + x\}/(2\sqrt{hcK/R})$, hc : 下流水深) であるからモデルと同じ表現にし、 $h(x,t) = h(x,0) + DH$ を解析解とし、これとモデルに初期条件; $h(x,0) = hc - i(L-x)$, 始端条件; $h(0,t) = h(0,0) + H_1$, 終端条件; $h(L,t) = hc$ を与えて計算したものとを比較して表-2に掲げた。なお、 $K, \lambda, \Delta x$ には Q と同じ値を与えた。

c) 大橋条件による検定 第28回年次学術講演会で大橋氏が、計算対象として扱われたような、始端が波動する場合重力の加速度項を省いた解析解は、 $\sigma = 2\pi/T_0$

(T_0 : 周期) として $h(0,t) = h_0 + H_1 \cos(\sigma t)$

の条件のもとに、 $M_A = M_L = \sqrt{\lambda \sigma / (2K + h_0)}$ として

$h(x,t) = h_0 + H_1 \text{Exp}(-M_A x) \cdot \cos(\sigma t - M_L t)$

である。これとモデルに初期条件; $h(x,0) = h_0$

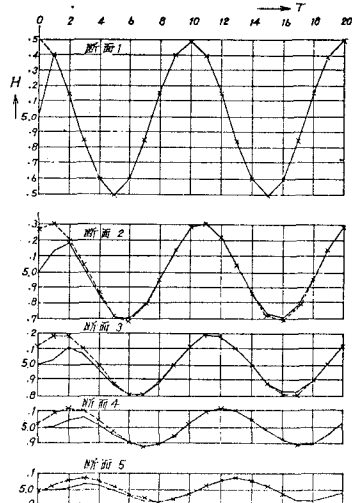
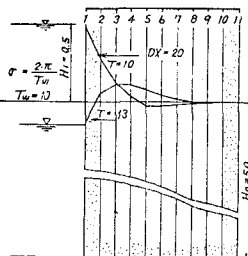
始端条件; $h(0,t) = h_0 + H_1 \cos(\sigma t)$

終端条件; $h(L,t) = h_0$ などを与えて計算した

ものとを比較して図-3に掲げた。初期条件につ

いてモデルには静止状態を与えたので、定常的な波動状態のもとで解かれた解析解とは始めの間は合致しないが、時間の経過とともに合致して行く様子がわかる。なお、この計算の $K, \lambda, \Delta x$ も Q と同じ値を与えた。

図-3 大橋条件による検定



2-2. 2次元の場合

2次元の場合、モデル検定に

格好な解析解が見当たらないの

で、井戸の奥に突いて1次元

的、対称的に解かれた、三宅

岸池田の理論(岸力著「水理

学演習」)で与えられる解析解

を境界値にもつ正方領域を作

り、これにモデルを適用して

格点の計算値を求め、このう

ち境界から対称的に影響をうける対角線上の格点の値を解析解と比較して表5に掲げた。三宅岸池田の理論は、

Q : 汲揚量, r : 井戸からの距離, H_B : $r \rightarrow \infty$ or $t \rightarrow 0$ の水深, $h(r,t)$ における水面降下量、などとするとき、 $\delta = Q/(2\pi K H_B)$, $u = \lambda r^2/(4K H_B t)$, $\phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{1}{2} W(u)$ として

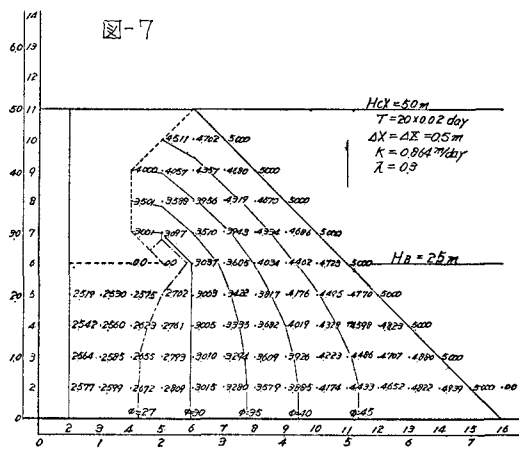
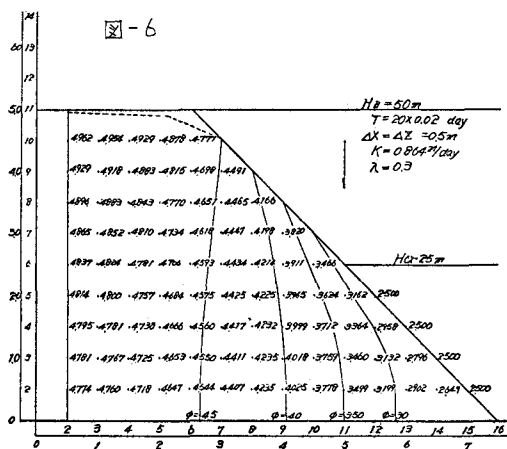
$\gamma_{H_B} = \delta \phi_1 + \frac{1}{2}(\delta \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\delta \phi_1)^3 + \dots$ である。モデルは 11×11 の格点のうち、 $Y=1$ と 11 , $X=1$ と 11 の境界上の格点に解析解を与えて計算した。井戸位置は $X=Y=6$, $K=0.864 \text{ m}^2/\text{day}$, $\lambda=0.3$, $\Delta x=1 \text{ m}$ などとした。

表-(5) 三宅岸池田の解と数値解との比較 $K=0.864 \text{ m}^2/\text{day}$ $\lambda=0.3$ $\Delta x=\Delta y=1 \text{ m}$ $\Delta t=0.02 \text{ day}$ $H_B=5 \text{ m}$ $Q=4 \text{ m}^3/\text{day}$

時刻	0	5 x Δt	10 x Δt	20 x Δt	30 x Δt	40 x Δt	50 x Δt
断面	断面	断面	断面	断面	断面	断面	断面
1	5.000	—	4.666	—	4.604	—	4.543
2	*	4.941	4.949	4.900	4.907	4.854	4.858
3	*	4.991	4.993	4.972	4.974	4.941	4.942
4	*	4.999	4.999	4.993	4.994	4.976	4.977
5	*	5.000	5.000	4.999	4.999	4.991	4.992
6	*	*	*	5.000	5.000	4.997	4.997
7	*	*	*	*	4.999	4.999	4.997
8	*	*	*	*	5.000	5.000	4.999
9	*	*	*	*	*	5.000	5.000
10	*	*	*	*	*	5.000	5.000
11	*	*	*	*	*	5.000	5.000

表値は対角線上の格点水深 $\{h(X,Y,T) \text{ (m)}\}$ ここに $(X,\Delta x=Y,\Delta y)$

3. 計算例 a) 鉛直な台形断面内の浸透流 X-Z 2次元の例として外水位が急変する場合の計算結果を図-6と図-7に掲げた。前者は $\Delta t = 0.02 \text{ day}$ の間に初期水位 $H_B = 5 \text{ m}$ から最終水位 $H_C = 2.5 \text{ m}$ に急降下した場合の $t = 20 \times \Delta t$ 時刻のものであり、後者は同じ Δt の間に $H_B = 2.5 \text{ m}$ から $H_C = 5 \text{ m}$ に急上昇した場合のものである。



b) 矢板回りの浸透流 自由地下水の問題ではないが、初期に静水圧状態にある河床に矢板を打込んで、上流側に $\Delta t = 0.05 \text{ day}$ の間に $H_B = 20 \text{ m}$ の急湛水をした場合の $t = 100 \times \Delta t$ 時刻のものを図-8に、定常状態に達したものを図-9に掲げた。後者は1-3で述べた方法によって計算したものであり、非定常で計算して $t = 300 \times \Delta t$ 時刻以降でほとんどこの状態に達する。

矢板回り 図-8

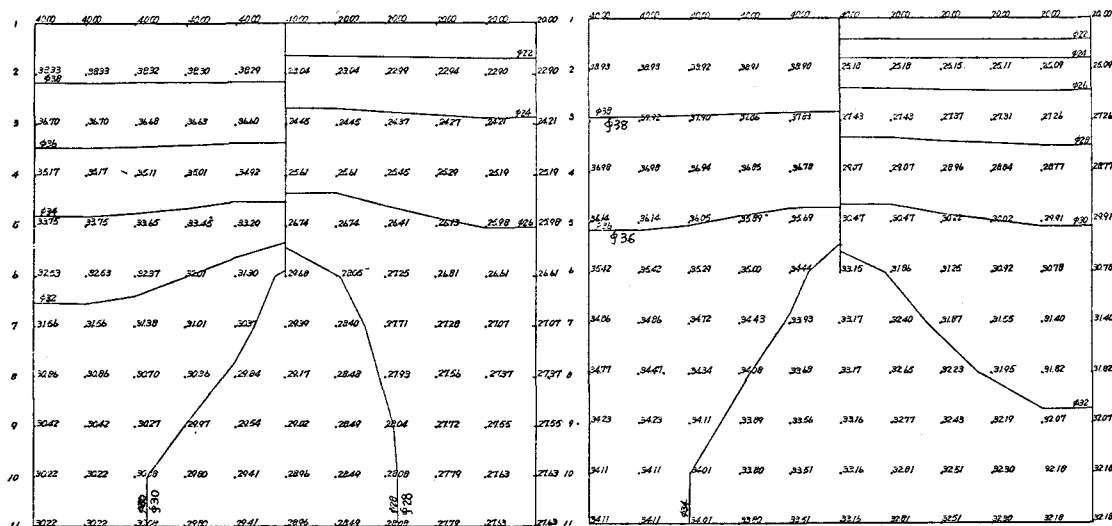
$T = 100 \times 0.05 \text{ day}$ $K = 0.8647 \text{ /day}$ $DX = DY = 2.0 \text{ m}$ $H_B = 20.0 \text{ m}$

$2H_A = 2H_Y = 11$ $K_f X = K_f Y = 6$

矢板回り 図-9

$T = \infty$ (定常) $K = 0.8647 \text{ /day}$ $DX = DY = 2.0 \text{ m}$ $H_B = 20.0 \text{ m}$

$2H_A = 2H_Y = 11$ $K_f X = K_f Y = 6$



参考文献

土木学会論文集 128号「低水流出の低減特性に関する研究」
才28回土木学会年次講演集 II-178「非定常浸透流に関する研究」
才28回土木学会年次講演集 II-176「自由地下水の非定常性について」
岸力著 水理学演習(1) 学献社「井戸への非定常流-深井戸」

高木不折
尾島 勝 ほか
大橋 行 三

土木学会北海道支部48年度論文報告集(21)「非定常浸透流におけるデジタルモデルの試作」 相田俊郎