

1. まえがき

最近、自由地下水面を有する非定常浸透流においては、解析結果が砂モデルによる実験結果とは一致せず、Helle-Shaw モデルによる実験結果と一致する報告がなされており¹⁾、このことから非定常浸透流における Darcy 則の妥当性が疑問視されている。本研究はこの点について検討を行なおうとするもので、その第一階として、非定常状態の自由地下水面の形状を数値解析により求め²⁾、この結果と Helle-Shaw モデルによる実験結果との比較を行なったのでここに報告する。

2. 基礎式

自由地下水面をもつ地下水の流れは、非圧縮性流体の無渦運動であるから、連続式と Euler の運動方程式より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

ここに $\phi(x, z, t)$ は非定常速度ポテンシャルであり

$$\phi = R \left\{ p / \rho g + z \right\} = R H(x, z, t)$$

次に自由地下水面の方程式は $F(x, z, t) = \phi - R z = 0$

で表わされ、 $DF/Dt = 0$ と Darcy 則から

$$\frac{m \partial \eta}{R \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{--- (2)}$$

m は浸透層の有効空隙率

すなわち自由地下水面を有する二次元非定常浸透流の解は、与えられた境界条件のもとに、式-1, 2 の両式を連立させて解くことにより得られる。本報では、S.O.R 法により数値的に解くことにする。

3. 基礎式の差分化

まず浸透領域を図-1のように格子状に分割し、加速係数を α 、計算の繰返し回数を n とおくと、式-1は、

$$H_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n + \alpha \left\{ \Delta z^2 (H_{i+1,j}^{n+1} + H_{i-1,j}^n + \Delta x^2 (H_{i,j+1}^n + H_{i,j-1}^n)) \right. \\ \left. / (2(\Delta x^2 + \Delta z^2)) - H_{i,j}^n \right\} \quad \text{--- (3)}$$

次に式-2の差分を考える。いま A 点における水頭 $H(A)$

を O 点について Taylor 級数に展開すると、

$$H(A) = H(O) + a \Delta z \frac{\partial H(O)}{\partial z} + \frac{(a \Delta z)^2}{2} \frac{\partial^2 H(O)}{\partial z^2} + \dots \quad \text{--- (4)}$$

である。(1) について z 方向の微分係数は

$$\frac{\partial H(A)}{\partial z} = \frac{\partial H(O)}{\partial z} + a \Delta z \frac{\partial^2 H(O)}{\partial z^2} + \frac{(a \Delta z)^2}{2} \frac{\partial^3 H(O)}{\partial z^3} + \dots$$

であり、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(O)}{\partial z} &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \frac{H(A)}{a(1+a)} - \frac{(1-a)H(O)}{a} - \frac{aH(R)}{1+a} \right\} \\ \frac{\partial^2 H(O)}{\partial z^2} &= \frac{2}{\Delta z^2} \left\{ \frac{H(A)}{a(1+a)} + \frac{H(R)}{1+a} - \frac{H(O)}{a} \right\} \\ \frac{\partial H(R)}{\partial z} &= \frac{1}{2\Delta z} \{ H(O) - H(S) \} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5)}$$

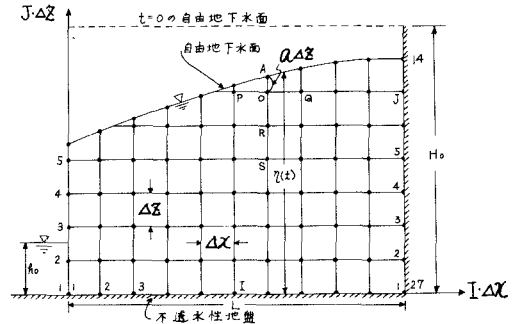


図-1 流れの場合

を代入して整理すると

$$\frac{\partial H(A)}{\partial z} = \left\{ \frac{H(A)}{a} - \frac{1+a^2}{a} H(O) + a H(R) + \frac{a^2}{2(1+a)} (H(O) - H(S)) \right\} \\ / (1 - \frac{a}{1+a}) \Delta z \quad \text{--- (6)}$$

となる。また x 方向の微分係数は、

$$\frac{\partial H(A)}{\partial x} = \frac{\partial H(O)}{\partial x} + a \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(O)}{\partial x} \right) + \frac{(a \Delta x)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 H(O)}{\partial x^2} \right) + \dots \quad \text{--- (7)}$$

であり、図-1のように O 点の左隣の P 点が自由地下水面の下にある場合には、

$$\frac{\partial H(A)}{\partial x} = \frac{H(O) - H(P)}{2\Delta x} + a \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H(O)}{\partial x} \\ + \frac{(a \Delta z)^2}{2} \frac{\partial^2 H(O)}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H(O)}{\partial x} + \dots \quad \text{--- (8)}$$

に式-5と同様の差分式を代入することにより算定できる。

また図-2のように、P

点が自由地下水面より

上にある場合には次の

ような取り扱いを考えた。

すなわち、自由地

下水面が J 格子線と交

わる位置 (F 点) と O 点

との中央位置を P' 点とし、P' 点を通る仮の縦格子線 I'

を引いて、P' 点の値を用いて式-7の算定を行う。この場合

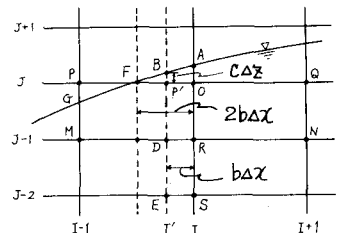


図-2 自由地下水面付近の格子

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(0)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{b \cdot H(0)}{1+b} + \frac{(1-b) \cdot H(0)}{b} - \frac{H(P')}{b(1+b)} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H(0)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{b}{1+b} \frac{\partial H(0)}{\partial x} + \frac{1-b}{b} \frac{\partial H(0)}{\partial x} - \frac{1}{b(1+b)} \frac{\partial H(P')}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 H(0)}{\partial x^2} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{b}{1+b} \frac{\partial^2 H(0)}{\partial x^2} + \frac{1-b}{b} \frac{\partial^2 H(0)}{\partial x^2} - \frac{1}{b(1+b)} \frac{\partial^2 H(P')}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であり、 b の値は $\eta(F) = J\Delta z$ をA点についてTaylor級数に展開した式を変形して求めた次式より算定し、

$$b = \left\{ \frac{\partial \eta(A)}{\partial x} - \sqrt{\left(\frac{\partial \eta(A)}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \eta(A)}{\partial x^2} \{ \eta(A) - J\Delta z \}} \right\} / 2 \{ \eta(A) - J\Delta z \} \quad (10)$$

$$= \therefore \frac{\partial \eta(A)}{\partial x} = \frac{\eta(Q) - \eta(G)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \eta(A)}{\partial x^2} = \frac{\eta(Q) + \eta(G) - 2\eta(A)}{\Delta x^2}$$

また $H(P')$ および $H(D)$ の値は

$$H(I') = H(I) - b\Delta x \frac{\partial H(I)}{\partial x} + \frac{(b\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 H(I)}{\partial x^2} - \dots \quad (11)$$

$\therefore H(I') = H(P')$ のと

$$H(I) = H(0)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(I)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{2bH(0)}{1+2b} + \frac{(1-2b)H(0)}{2b} - \frac{J\Delta z}{2b(1+2b)} \right\} \\ \frac{\partial^2 H(I)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ \frac{H(0)}{1+2b} + \frac{J\Delta z}{2b(1+2b)} - \frac{H(0)}{2b} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$H(I') = H(D)$ のと

$$H(I) = H(R)$$

$$\frac{\partial H(I)}{\partial x} = \frac{H(N) - H(M)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 H(I)}{\partial x^2} = \frac{H(N) + H(M) - 2H(R)}{\Delta x^2} \quad (13)$$

から算出する。また $H(B)$ の値は式-4を変形した次式

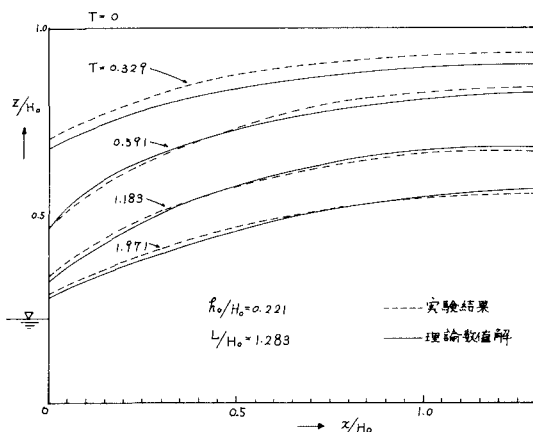


図-3 数値解と実験結果との比較

$$\begin{aligned} H(B) &= H(P') + c \left\{ \frac{H(P)}{c(1+c)} - \frac{(1-c)H(P')}{c} - \frac{c \cdot H(D)}{1+c} \right\} \\ &+ c^2 \left\{ \frac{H(B)}{c(1+c)} + \frac{H(D)}{1+c} - \frac{H(P')}{c} \right\} + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

$$\therefore c = \{ H(B) - J\Delta z \} / \Delta z$$

のTrial計算から算出する。

以上の算定結果を用いれば $\Delta T (= \Delta t R_0 / m H_0)$ 時間後の自由地下水面の位置が次式から算出される。

$$\frac{\eta(I, T + \Delta T) - \eta(I, T)}{\Delta T} = \frac{\partial H(A)}{\partial x} \left\{ \frac{\eta(I+1, T) - \eta(I-1, T)}{2\Delta x} \right\} - \frac{\partial H(A)}{\partial z} \quad (15)$$

4. 数値計算

計算は次の境界条件のもとに行なった。

$$t=0: \eta(x, 0) = H_0$$

$$t>0: \eta(x, t) = z, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$H = h_0, \quad x=0, \quad 0 \leq z \leq h_0$$

$$H = z, \quad x=0, \quad h_0 \leq z \leq \eta(0, t)$$

$$\partial H / \partial x = 0, \quad x=L, \quad 0 \leq z \leq \eta(L, t)$$

$$\partial H / \partial z = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad z=0$$

なお加速係数の値は、予備計算の結果、1.8とし、 $\Delta T = 0.05$ 、 $\Delta x = L/26$ 、 $\Delta z = \eta(L, t)/13$ とした。

5. 実験結果との比較

実験は油温 12°C で $\nu = 2.20 \text{ cm}^2/\text{s}$ の油を用いて、平行平板間隔 $D = 2.0 \text{ mm}$ 、 $L = 29.0 \text{ cm}$ のHele-Shawモデルで行なった。実験結果は、いずれも実験開始直後に計算結果より遅れて低下しているが、実験開始直後の現象が非常に速く、時間の読み取りに誤差があることを考慮すると、両者はほぼ一致していると考えることができよう。

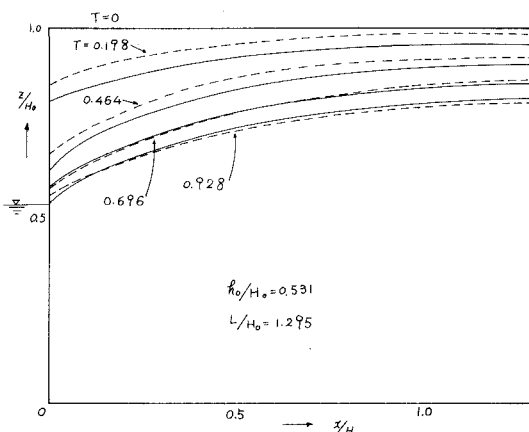


図-4 数値解と実験結果との比較

参考文献 1) 島祐元: 多孔性透水層の流動現象について, 土木学会第28回年次講演概要集, Vol. II, pp373~pp375, 昭和48年10月。

2) R.D.Verma & W.B.Brutsaert: Unsteady free surface ground water seepage, Proc. ASCE, Vol. 97, HY8, pp. 1213~1229, Aug. 1971.