II-52　雨量配分率－期間曲線の確率論的推定について

名古屋工業大学　正員　○長尾正志
日本国有鉄道　正員　後藤晴男
名古屋市役所　正員　村上芳樹

1. 雨量配分率曲線に関する従来の問題点

任意の継続期間に対する豪雨量を，ある基準期間雨量に対する配分率曲線として推定しようとする従来の研究は，ほとんど経験公式の採用や独立雨量系列の仮定に準拠しており，豪雨時系列の確率統計的性格に対する配慮が欠除していたといえる。本研究は，ガンマ型多変量の和分布に関する理論的成果を用いて，上記曲線を推定する手法を考察し，それに必要な図面の作製ならびに近似推定式の理論的誘導を行なっている。

2. 短時間雨量の任意和の分布

雨量配分の概念は，雨量時系列の和分布を基礎とする。これについての著者の研究成果を以下にまとめておく。[1),2)]
まず，単位期間の雨量 R_1 の形状母数，尺度母数および相関母数がそれぞれ $\nu(1)$，$\sigma(1)$ および $\rho(1)$ のガンマ分布に従うものとし，これを $R_1 \in G(\nu(1), \sigma(1); \rho(1))$ と記す。つぎに，このS倍の期間長をもつ基準期間雨量 R_S も $R_S \in G(\nu(S), \sigma(S); \rho(S))$ に従うとすれば，各母数の間には近似的に次式が成立つことが示される。

$$\nu(1)/\nu(S) = \sigma(S)/\{\sigma(1)\cdot S\} = \rho(S)/\rho(1) \qquad (1)$$

さらに，継続期間と相関母数との関係として，次式が得られている。

i)　$S = 2^n$（n：正整数）の場合　$\rho(2^i) = \rho(2^{i-1})\{1+\rho(2^{i-1})\}/2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$　(2)

ii)　上記以外の一般の場合　$\rho(S) \fallingdotseq \rho(1)[S\{1-\rho(1)^2\} - 2\rho(1)\{1-\rho(1)^S\}]/S^2\{1-\rho(1)\}^2$　(3)

したがって，基準期間における雨量分布 $G(\nu(S), \sigma(S); \rho(S))$ が既知ならば，任意の期間長 S に対して，式(2)あるいは(3)から，$\rho(S)$ より $\rho(1)$ が求まり，さらに式(1)よりすべての未知母数が計算できることになる。

3. 継続期間と確率雨量の関係

3.1　基礎条件の設定　基準期間雨量の特性値を既知とした場合に，単位期間雨量を推定するに要する図面を作製したが，以下にその条件を示す。

i)　相関母数：これには豪雨を生ずる気象原因に応じた適切な数値の対応が予想されるが，詳細は不明である。雨量時系列の相関は通常正と考えられるので，$\rho(S)$ は 0 と 1 の間で考え，$\rho(S) = 0, 0.05, 0.1\,(0.1)\,0.9, 0.95, 1$ とする。　ii)　形状母数：ここでは基準期間に日（すなわち24時間）程度を問題としているので，その場合の雨量分布は，指数分布ないしそれより若干歪んだ逆J字型となるのが普通である。したがって，$\nu(S)$ を 1/2 ないし 1 程度と考え，$\nu(S) = 1/2, 3/4, 1$ とする。　iii)　尺度母数：尺度母数は雨量の大きさを表現する際の換算尺度である。そこで，$\sigma(S) \equiv 1$ としても一般性を失わない。

以上の諸条件の下で，24時間程度を基準とし，それ以下1時間程度までの推定を対象とする。すなわち，$S = 1, 1.5, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48$ としている。なお，分割数 S と継続期間 T との間には，基準期間に24時間を採用した場合には，次式の関係が成立つ。

$$T = 24/S \quad \text{あるいは} \quad S = 24/T \qquad (4)$$

たとえば，設定した S に対する T の値は，$T = 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1, 3/2, 1/2$ 時間である。

3.2　確率雨量配分率の算定と図示　一般に，形状母数 ν，尺度母数 σ のガンマ分布に従う雨量 R の非超過確率 $F(R)$ は次式で与えられる。ここに，$\Gamma(\nu)$：ガンマ関数，$\gamma(\nu, x)$：第1種不完全ガンマ関数　である。

$$F(R) = \gamma(\nu, R/\sigma)/\Gamma(\nu) \qquad (5)$$

ここで，$\nu = \nu(1)$，$\sigma = \sigma(1)$ とおくと，所与の S，$\nu(S)$，$\sigma(S)$，$\rho(S)$ に対して，ν，ρ は前述のようにして既知となり，非超過確率 F を指定すれば，基準期間長の S 分割に対する雨量（単位期間雨量）$R^{(S)} \equiv R_1$ が計算できる。すなわち S 分割雨量 $R^{(S)}$ を，$\xi = R^{(S)}/\sigma(1)$ で規準化表示すると，式(5)は，尺度母数に無関係な次式

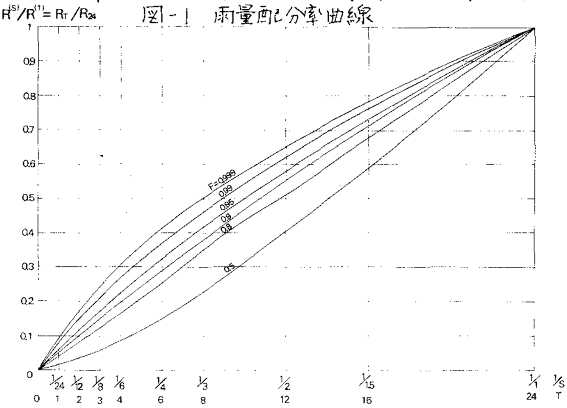
$$F(\xi) = \gamma(\nu,\xi)/\Gamma(\nu) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \xi^{\nu+n}/\{n!\,(\nu+n)\}\right]/\Gamma(\nu) \qquad (6)$$

で計算される。したがって，所与の超過確率Fに対して上式より$\xi=\xi_F$を求めると，次式で$R^{(s)}$が計算される。

$$R^{(s)} = [\,\xi_F\cdot\sigma(1)\,]_{S=s} \qquad [\,S=s\text{は分割数が}S\text{であることを示す}\,] \qquad (7)$$

つぎに以上の結果を，基準期間雨量$R^{(1)}$に対する単位期間雨量$R^{(s)}$の比，$R^{(s)}/R^{(1)}$，あるいは，24時間雨量R_{24}に対するT時間雨量R_Tの比，R_T/R_{24}，で表現し，この$S^{-1}\sim R^{(s)}/R^{(1)}$あるいは$T\sim R_T/R_{24}$関係を雨量配分率－期間曲線，あるいは(確率)雨量配分率曲線と呼んでおく。この雨量配分率曲線を3.1の諸条件の下で計算し，Fをパラメーターとして図示した。図-1は，$\nu(S)=1$，$\rho(S)=0.2$ の例である。

図-1 雨量配分率曲線



3.3 確率雨量配分率曲線の一般的特性　前述の設定条件の下における計算結果の図示によって以下のような諸傾向を読み取ることができる。

i) $\nu(S)$の影響：Fの変化に伴う配分率の存在範囲は，$\nu(S)$が小さいと広く，$\nu(S)$が大きいと狭くなる。

ii) $\rho(S)$の影響：Fの変化に伴う配分率の存在範囲は，$\rho(S)$が大きいと狭くなり，最終的に$\rho(S)=1$では1本の直線に收束する。逆に，$\rho(S)$が小さくなると存在範囲は広がる。　iii) Fの影響：Fが大になるにつれて配分率は1に近づき，Fが十分1に近くなると，曲線$S^{-1}\sim R^{(s)}/R^{(1)}$は上に凸になる。逆にFが減ずるにつれて，漸次下に凸に移行し，その中間に直線に近い遷移状態が存在する。　iv) $F\to1$かつ$\rho(S)\to0$の極限：Fが十分1に近くかつ$\rho(S)\to0$ならば，配分率$R^{(s)}/R^{(1)}$は指数関数形 $(1/S)^{\alpha}=(T/24)^{\alpha}$ に漸近する。ここに，αは$0<\alpha<1$の定数であり，αの値は$F\to1$に従って減少する。

さて，以上の諸特性を考慮して，任意の継続期間に対する雨量配分率曲線の推定式を確率論的に誘導しよう。

4. 確率雨量配分率曲線の推定式の誘導

4.1 規準化確率雨量の近似的表現　以上の計算の基礎になるのは式(6)による非超過確率Fに対する規準化確率雨量ξ_Fの算出で，これには第1種不完全ガンマ関数$\gamma(\nu,\xi)$の計算を要し，ξ_FはFについて陽に表現できない。そこでξ_Fの概略の性質を理解するために，$\xi\gg1$，かつ$0<\nu\leq1$の仮定の下にξ_Fの近似的な算定を行なう。このためには，次式の第2種不完全ガンマ分布$\Gamma(\nu,\xi)=\Gamma(\nu)-\gamma(\nu,\xi)$の漸近的表現，

$$\Gamma(\nu,\xi)=\xi^{\nu-1}\cdot e^{-\xi}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m\,\Gamma(1-\nu+m)}{\xi^m\cdot\Gamma(1-\nu)}+O(|\xi|^{-M})\right] \qquad [\,\xi\to\infty,\ M=1,2,\cdots\,] \quad (8)$$

などを利用している。途中の計算過程は省略し最終結果のみを示すと，式(6)はξに関する二次方程式の正根となり，次式のように与えられる。

$$\xi_F=\frac{1}{2}\left[-\{\log(1-F)+\log\Gamma(\nu)+2(1-\nu)+1\}+\sqrt{\{\log(1-F)+\log\Gamma(\nu)+2(1-\nu)-1\}^2+12(1-\nu)}\right] \qquad (9)$$

以上によって，規準化確率雨量ξ_Fが近似的ではあるが，陽の形で表現されたことになる。

そこで，この近似式の近似の程度を厳密式(6)と近似式(9)との比較によって検証したが，実用上問題となる$S\leq$24以下では両者は極めて良く合致することが認められている。

4.2 確率雨量配分率曲線の推定式

4.2.1 推定の基礎式　理論の出発点を前出の近似式(9)におく。いま，$S=1$に対する規準化雨量ξ，形状母数をそれぞれξ_0，ν_0 また $\varepsilon=1-F$ と記す。ν_0の近傍におけるν（すなわち分割数Sがあまり多くない場合）に対して，ξ/ξ_0の近似式は(10)式，さらに超過確率をεとおいて，定性的傾向をみるための粗い近似式

として(11)式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{\xi_0} &= \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\alpha} \\ \alpha &= \frac{\nu_0}{2\xi_0\sqrt{b^2+c}}\left[\{2-\psi(\nu_0)\}\left(\sqrt{b^2+c}+b\right)-6\right]\end{aligned}\right\}(10) \qquad \left.\begin{aligned}\frac{\xi}{\xi_0} &= \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\alpha'} \\ \alpha' &= \frac{\nu_0\{2-\psi(\nu_0)\}}{-\log(1-F)-2(1-\nu_0)-\log\Gamma(\nu_0)}\end{aligned}\right\}(11)$$

ただし，(10)式中の a, b, c は以下のように超過確率 ε および基準期間雨量の形状母数 $\nu_0=\nu(S)$ の関数である。

$$a=-\log\varepsilon-\log\Gamma(\nu_0)-2(1-\nu_0)-1,\quad b=-\log\varepsilon-\log\Gamma(\nu_0)-2(1-\nu_0)+1,\quad c=12(1-\nu_0) \qquad (12)$$

4.2.2　自己相関を考慮した場合の推定式　$\rho(S)\neq 0$ に対する推定式は，式(10)あるいは(11)より，(13)式のように表わされ，これを24時間を基準にした表現に改めると(14)式のようになる。

$$\frac{R^{(S)}}{R^{(1)}}=\frac{1}{S}\left\{\frac{\rho(1)}{\rho(S)}\right\}^{1-\alpha} \qquad (13) \qquad\qquad \frac{R_T}{R_{24}}=\frac{T}{24}\left(\frac{\rho_T}{\rho_{24}}\right)^{1-\alpha} \qquad (14)$$

上式で，$\rho(1)/\rho(S)$ あるいは ρ_T/ρ_{24} は，$\rho(S)$，$\nu(S)$ あるいは ρ_{24}，ν_{24} が所与ならば，$1/S=T/24$ のみの関数である。したがって，配分率は $\nu(S)$，$\rho(S)$ あるいは ν_{24}，ρ_{24} が既知ならば，任意の非超過確率 F に対しする分割数 $1/S$ あるいは $T/24$ のみの関数として表現されたことになる。すなわち，式(13)，(14)は雨量時系列の自己相関性，分布形状などの諸特性を考慮した極めて普遍性のある雨量配分率曲線の推定式といえる。

4.2.3　完全独立の場合の推定式と数値的検討　とくに上式で $\rho(S)=0$ とおくと，完全独立の場合の推定式として次式が導ける。

$$\frac{R^{(S)}}{R^{(1)}}=\left(\frac{1}{S}\right)^{\alpha} \qquad (15) \qquad\qquad \frac{R_T}{R_{24}}=\left(\frac{T}{24}\right)^{\alpha} \qquad (16)$$

上式が従来の雨量配分率の経験式と同じ形であることは興味深い。そこで，$\nu(S)=1$，$3/4$，$1/2$ に対する α，α' の推定式および $F=0.9$，0.95，0.99，0.995，0.999 に対する数値を表-1に示す。なお，表中の α'' は $\rho(S)=0$ に対する理論式(6)，(7)について，$T/24\sim R_T/R_{24}$ について式(16)のような指数関数表示が可能とした場合の α の最小二乗解である。α'' と α（あるいは α'）は若干の相違はあるが，理論の誘導で F が十分1に近いとか分割数が多くないなどの大略の近似にもかかわらず，概略の性質はよく合致しているといえよう。

なお，慣用される物部式では $\alpha=1/3$，また伊藤式では $\alpha=0.506\sim0.667$ が採用されていることから，従来の経験式も，通常の豪雨分布形状や標本の確率年などから判断して，あながち不当とはいえないようであるが，本研究により雨量時系列特性との関連が明確にされたことは極めて有用であると考えられる。

表-1　完全独立の場合に対する α の推定式と数値

	$\nu(S)$ ╲ F	1	0.75	0.5
	Eq.(10)	$\frac{2.5772b-3}{\xi_0 b}$ $b=-\ln\varepsilon+1$ $\xi_0=-\ln\varepsilon$	$\frac{1.1572(\sqrt{b^2+3}+b)-2.25}{\xi_0\sqrt{b^2+3}}$ $b=-\ln\varepsilon+0.2967$ $\xi_0=(b-2+\sqrt{b^2+3})/2$	$\frac{0.9909(\sqrt{b^2+6}+b)-1.5}{\xi_0\sqrt{b^2+6}}$ $b=-\ln\varepsilon-0.5724$ $\xi_0=(b-2+\sqrt{b^2+6})/2$
α	0.999	0.318	0.314	0.305
	0.995	0.397	0.397	0.395
	0.99	0.443	0.448	0.450
	0.95	0.610	0.629	0.647
	0.9	0.725	0.752	0.779
	Eq.(11)	$\frac{2.5772}{-\ln\varepsilon}$	$\frac{2.314}{-\ln\varepsilon-0.7033}$	$\frac{1.9181}{-\ln\varepsilon-1.5724}$
α'	0.999	0.373	0.373	0.371
	0.995	0.486	0.504	0.532
	0.99	0.560	0.593	0.653
	0.95	0.860	1.010	1.392
	0.9	1.119	1.447	2.714
α''	0.999	0.316	0.268	0.220
	0.995	0.410	0.357	0.304
	0.99	0.472	0.418	0.365
	0.95	0.749	0.701	0.671
	0.9	1.012	0.987	1.010

参考文献　1) 長尾正志：豪雨の短時間配分に関する二変数ガンマ分布の応用，土木学会28回講演会概要，第2部，pp 115～117，1973　2) 長尾正志：短時間豪雨分布の推定に関する二変数ガンマ分布の応用，名古屋工業大学学報，Vol. 25，pp 325～334，1973.