

1. まえがき 流れの表面を伝播する波のエネルギー収支は波の伝播方向に流速変化を伴う場合について深さ方向に流速が一様な分布をし非回転運動として Longuet-Higgins と Stewart⁽¹⁾ によって得られている。本研究では深さ方向の流速分布、乱れ、水面勾配等をも考慮した場合の二次元不等流上での波エネルギー収支を論じ、不等流を遡る波の波高変化を数値計算例に基いて考察する。

2. 波エネルギー収支 右図のように x 軸 y 軸をとる。流れの速度成分を (U, V) 、波の速度成分を (u, v) で表わし、水面の水平に対する傾きを θ とする。ポテンシャルエネルギーの水平基準線を $y = H_0$ とする。このとき運動および連続の方程式は次で表わされる。

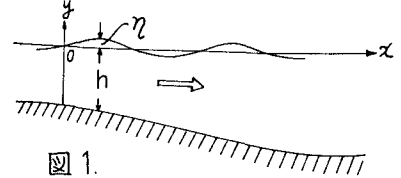


図 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial (U+u)}{\partial x} + (V+v) \frac{\partial (V+v)}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U+u) \frac{\partial (V+v)}{\partial x} + (V+v) \frac{\partial (V+v)}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial (U+u)}{\partial x} + \frac{\partial (V+v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ただし、 ρ : 密度、 g : 重力加速度、 p : 圧力、 t : 時間、 $\tau_x, \tau_y, \tau_{xy}$: 応力成分を表わす。

(1) $\times \rho (U+u)$ + (2) $\times \rho (V+v)$ を $y = -h \sim \eta$ まで積分し、(3) と次に示す水面条件 (4) および底条件 (5) を用いて (6) のように波と流れの共存場における全エネルギーの収支関係を得る。ただし、上付きの横線は波周期に関する平均を意味し、 h, η は図に示すとおりである。

$$(V+v)_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U+u)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4) \quad (V+v)_{-h} = -(U+u)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + (V+v)^2 \} + \rho g \cos \theta (y - H_0) \right] dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + (V+v)^2 \} + p + \rho g \cos \theta (y - H_0) \right] (U+u) dy \\ & = \int_{-h}^{\eta} (U+u) \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} (V+v) \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (6)$$

波エネルギー収支は (6) を変形し若干の計算の後に次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + p + \rho g \cos \theta \cdot y \} u dy + \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 U \right] \\ & = \rho g \sin \theta \int_{-h}^{\eta} u dy + \rho g \cos \theta \cdot \eta \cdot \overline{v} + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \cos \theta \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} - \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) u \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) v \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) v \frac{\partial V}{\partial x} dy \\ & \quad - \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) u \frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{-h}^{\eta} u \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (7)$$

この式の右辺をみると不等流上ではかなり複雑な波と流れの間の相互干渉作用によって波エネルギーが変化することが知れる。なお式中の例えば $\overline{U}$ は $y = \eta$ における U を表わす。ところで、流れは漸変流とし、 $\partial u_x / \partial x, \partial u_y / \partial y, \partial \tau_{xy} / \partial x$ を $\partial \tau_{xy} / \partial y$ に較べて無視できるものとし、 $\partial V / \partial x$ を $\partial U / \partial x$ に較べて無視できるものとする。また、 θ は $\cos \theta = 1, \sin \theta = \tan \theta = I_s$ (I_s : 水面勾配) とおける程度として、波については二次までの近似で (7) を表わしてみる。そのとき (7) の右辺は次のように近似される。

$$\begin{aligned} \text{第1項} & \approx \rho g I_s \eta \overline{U} & \text{第2項} & \approx -\rho g I_s \eta^2 \frac{d \overline{U}}{dx} & \text{第3項} & \approx \frac{1}{2} \rho g I_s \eta^2 \frac{d \overline{U}}{dx} \\ \text{第4項} & \approx -\rho \eta \overline{U} \frac{d}{dx} \left(\frac{\overline{U}^2}{2} \right) - \int_{-h}^{\eta} \rho \overline{U}^2 \frac{\partial U}{\partial x} dy & \text{第5項} & \approx \int_{-h}^{\eta} \rho \overline{V}^2 \frac{\partial U}{\partial y} dy & \text{第6項} & \approx 0 \end{aligned}$$

$$\text{才7項} \approx -\int_{-h}^0 \rho \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy \quad \text{才8項} \approx \int_{-h}^0 \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy \quad \text{才9項} \approx 0$$

また、左辺のエネルギー密度 (E)、エネルギー流束 ($E_f = E \cdot C_E$; C_E : 波エネルギー輸送速度) は次のように近似される。

$$E = \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 = \frac{1}{8} \rho g H^2 r \quad (H: \text{波高}) \quad (8)$$

$$E_f = \int_{-h}^0 \bar{p} \bar{u} dy + \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \bar{v} dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \bar{v} \quad (9)$$

したがって、(7)は次のようになる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (E \cdot C_E) = - \left[\int_{-h}^0 \rho (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \frac{d \bar{v}_0}{dx} \right] + \rho g \bar{\eta} \bar{u}_0 \left[1_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{v}_0^2}{2g} \right) \right] - \int_{-h}^0 \rho \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy + \int_{-h}^0 \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy \quad (10)$$

右辺才一項について考察する。いまの近似で (2) を $y = \eta \sim y$ まで積分し波周期の平均をとり ($\partial \bar{v} / \partial x$) が小さいとして $\bar{v}^2$ を無視すると $-\rho \bar{v}^2 = \bar{p} + \rho g y$ とおけることが示される。したがって、(10)の右辺才1項は

$$- \left[\int_{-h}^0 (\bar{p} \bar{u}^2 + \bar{p}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \frac{d \bar{v}_0}{dx} + \int_{-h}^0 \rho g y \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy \right] \quad (11)$$

と表わされるが、これは次の表現の二次までの近似にほかならない。 $-\rho g y$ は静水圧であるからこれを P_0 で表わす。

$$- \left[\int_{-h}^0 (\bar{p} \bar{u}^2 + P) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy - \int_{-h}^0 P_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy \right] \quad (12)$$

カッコ内の才1項は波の存在下で圧力 p と波動運動による応力 ρu^2 が流れになす仕事を表わし、才2項は波が無い場合のもので、上式は両者の差であるから波の存在下における余剰分を表わす。また、流れは深さ方向に一樣な分布をするとしたとき、このカッコの中は次のようになる。

$$\left\{ \int_{-h}^0 (\bar{p} \bar{u}^2 + P) dy - \int_{-h}^0 P_0 dy \right\} \frac{d \bar{v}}{dx} \quad (13)$$

{...} は Longuet-Higgins と Stewart によって Radiation Stress と名付けられたものの成分 S_x にほかならない。したがって、(10)の右辺才一項のカッコは Longuet-Higgins と Stewart の理論に現われる $S_x \frac{d \bar{v}}{dx}$ なる項に対応し、その流速分布を考慮した場合の表現とみることができる。

(10)の右辺才2項のカッコは流れの摩擦勾配で等流の場合の水面勾配に相当する。したがって、(10)の右辺の才2項、才3項、才4項は既に著者が等流の場合の計算で示したものである(2)。ただし、不等流の場合には水面勾配そのものは小さくても流れが流程とともにエネルギー損失を伴えば波エネルギーが変化するということになる。波も流れもエネルギー損失はなく流速は深さ方向に一樣としたとき(10)は Longuet-Higgins と Stewart の結果と一致する。

3. 波高変化 (10)の右辺の項を次のように置く。

$$2\alpha^* \cdot E \cdot C_E = - \left[\int_{-h}^0 \rho (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \frac{d \bar{v}_0}{dx} \right] \quad (14)$$

$$2\alpha \cdot E \cdot C_E = - \rho g \bar{\eta} \bar{u}_0 \left[1_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{v}_0^2}{2g} \right) \right] + \int_{-h}^0 \rho \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy - \int_{-h}^0 \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dy \quad (15)$$

単一規則波とし $\partial E / \partial t$ を零とおいて (10) を $x = 0 \sim x$ まで積分して波エネルギー E の変化は次のようになる。

$$\frac{E}{E_0} = \frac{C_{E0}}{C_E} \cdot e^{\int_0^x \alpha^* dx} \cdot e^{-\int_0^x \alpha dx} \quad (16)$$

また、 $E \propto H^2$ より波高の変化は次のようになる。ただし、上式および次式中の添字(0)は $x=0$ での値である。

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{C_{E0}}{C_E} \cdot \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\int_0^x \alpha^* dx} \cdot e^{-\int_0^x \alpha dx} \quad (17)$$

上式から不等流上を伝播する波の波高変化を追跡できるということになるわけであるが、この綿密な計算は非常に繁雑で困難である。ところで(10)は基本的には Longuet-Higgins と Stewart によって得られた関係に右辺の2, 3, 4項が補正項として加わり、それが(17)で $e^{-\int_0^x \alpha dx}$ として現われたものとみることができる。そこで $C_E \sim C_g$ (群速度), $r \sim 1$, $\alpha^* \sim \frac{S_x}{2C_g} \frac{d \bar{v}_0}{dx}$ として計算し、その結果の補正として $e^{-\int_0^x \alpha dx}$ 項は綿密に計算をするということにしていくつかモデル計算を行なってみた。 α の計算は文献(2)で示した滑面乱流で対数分布

とした場合のものである。モデルは河口から河川部に侵入した波が上流に向かって遡上していく過程で水深は浅くなり、次々に向かい流れが速くなるような場合を考え、結果を図2~7までに示した。図中の実線が波高の変化を表わし、点線は波高を増幅させる因子 $e^{-\int \alpha dx}$ による波高変化を与えるものでもある。一実線は(17)の $e^{-\int \alpha dx}$ なる因子の変化を示す。

計算結果から概略次のことが定性的に推定される。すなわち、底勾配が大きく流速の変化が短い距離でおこなわれるときにはLonguet-HigginsとStewartの理論で与えられるものに近い波高変化を示して波は上流に向かって増幅していくが、底勾配が小さくなるにつれて $e^{-\int \alpha dx}$ の効果が卓越し、やがて流速変化が長い距離にわたってゆるやかにおこなわれる底勾配の小さい場合には波高は伝播とともに減衰するようになる。周期の長い波のほうがより上流まで遡上する。減衰効果は傾向として周期の短い波の方が幾分大きい。

なお、図中の碎波莫はMicheや浜田によつて与えられた次の関係を用いたときの推定値である。添字 b を碎波莫での値として、

$$(H/L)_b = 0.142 \tanh 2\pi (h/L)_b$$

4. あとがき

本報告では不等流を伝播する波のエネルギー収支について述べ、数値計算によって不等流を遡る波の波高変化について考察した。

本研究を行なうにあたり終始ご指導を賜った東北大学工学部 岩崎敏夫教授に深く感謝します。また本研究は文部省科学研究補助金(奨励研究A)の助成を受けたことを付記し謝意を表します。

参考文献

- (1) M.S.Longuet-Higgins & R.W.Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents., Jour. of Fluid Mechanics. Vol. 11. 1961
- (2) 佐藤 道郎: 流れを遡る波のエネルギーの減衰について(Ⅲ), 第20回海岸工学講演会論文集, 1973

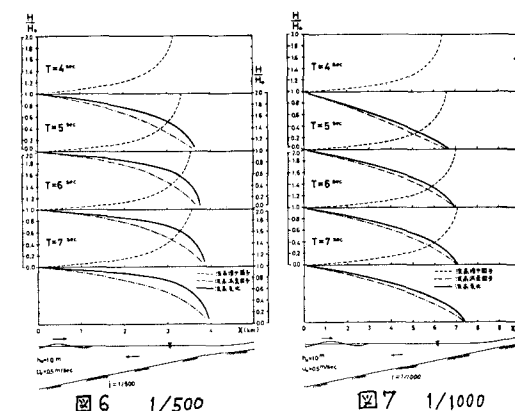
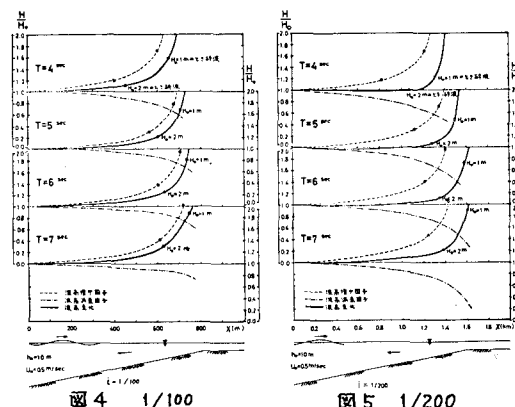
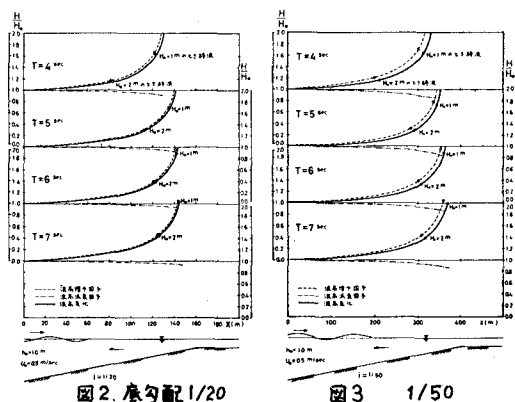


図2~7 波高変化のモデル計算結果。(x=0における水深 $h_0=10$ m, 流速 $U_0=0.5$ m/secで、波周期 $T=4\sim 7$ secとし、底勾配 $i=1/20\sim 1/1000$ のもの。実線が波高 H/h_0 を表わす。)