

京大防災研究所 正会員 土屋義人
京大大学院 学生会員 安田孝志

- 緒言 沿岸流や沿岸漂砂などの浅海域での輸送現象には、表による質量輸送が重要となる。一方、浅海域では表の理論として7/1イド波理論が必要となり、またそれによる質量輸送現象の解明が要求されることになる。ところで、7/1イド波理論による質量輸送に関する研究としてはすでにLe Méhautéや土屋らのものがあるが、Le Méhautéの理論は物理的表速度の定義を必要とする従来の有限振幅波理論としての欠陥に直接的影響を受け、波速の定義の任意性に質量輸送速度が依存することになる。本研究では、著者らによて新たに提案された7/1イド波理論の考え方次元化解を用いて、質量輸送に関する若干の研究を行なうので、その概要を述べる。
- 質量輸送速度と表速の定義 Stokesの表速の定義は、周知のように、水平水粒子速度をもとめれば、それは、それぞれ次式で表される。そして、質量輸送速度はそれと表-1の表示のようになる。

Stokesの表速の考え方定義: $C_g = \pm \int_0^L U dx$; $U_w = U - C_g$; $\int_0^L U_w dx = 0$ (1)

Stokesの表速の考え方定義: $C_g = \frac{1}{L} \int_0^L U dx$; $U_w = U - C_g$; $\int_0^L U_w dx = 0$ (2)

このように、流体運動の特性が表速の定義によって異なり、Eものに有るので、波による質量輸送現象を解明するためには、式(1)あるいは式(2)のいずれを用いるべきかではなく、物理的表速度の定義を必要としない波動理論に基づく必要がある。このため、すでに著者ら

Wave theory	Definition of wave celerity	Total mass transport	Mass transport velocity U_m / gh
Stokes (Stokes waves)	first definition	exist	$\frac{C_0}{8} \frac{(2\pi)^2 H^2 \cosh(4\pi z/L)}{\sinh^2(2\pi h/L)}$
	second definition	vanished	$\frac{C_0}{8} \frac{(2\pi)^2 H^2 \cosh(4\pi z/L) - \pi H^2}{\sinh^2(2\pi h/L) - 4hL} \coth(2\pi h/L)$
Le Méhauté (cnoidal waves)	first definition	exist	$\frac{(E/F)}{24k} (2-k^2)(H/h_t)^2 c_L$
	second definition	vanished	none
Authors (cnoidal waves)	unnecessary	exist	$\frac{(H/h)^2}{6k} [(E/F)(2-3(E/F)-2k^2)+k^2-1]$ $\frac{(H/h)^2}{3k^*c^*} [(E/F)(3(E/F)-4+2k^2)-k+1]$

に流体運動の内部にはほんらの拘束も与えず、水面変動に対してのみ運動運動を仮定して、水面変動に関する運動方程式を導き、新しい7/1イド波理論を開発した。この理論によれば、表速は一義的に決定され、たとえば水平および鉛直水粒子速度は次式で表される。その結果質量輸送速度は一義的に確定されると考えられる。

$$\begin{aligned} U/\text{km} = U_1 + U_2 &= -(H/k) (E/F - 1/k^2) / k^2 + (H/k) \text{ch}^2 \theta + (1/4k^2) (H/k)^2 \{ (E/F) (8 - 5k^2 - 4(E/F)) + 7k^2 - 3k^4 - 4 - 3k^2(H/k)z^2 \} + (1/4k^2) (H/k)^2, \\ \{ 7k^2 - 6 + 2(E/F) - 6(2k^2 - 1)z^2 \} \text{ch}^2 \theta + (9z^2/4 - 1) (H/k) \text{ch}^4 \theta, W/\text{km} = z \{ (3(H/k)^3/k^2) \text{ch} \theta \text{sn} \theta \cdot \text{dn} \theta + z (1/8k) (3(H/k)^5/k^2) \}^{1/2}, \\ \{ 16(E/F) + 19k^2 - 22 + 4z^2(1 - 2k^2) + 4k^2(3z^2 - 4) \text{ch}^2 \theta \} \text{ch} \theta \cdot \text{sn} \theta \cdot \text{dn} \theta \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\theta = d(x^* - C^* t)$, $x^* = x/h$, $z^* = z/h$, $z = z/h$ および $C^* = C/k$ であり、 k は積円積分の母数、 F および E はそれぞれ1および2種完全積円積分、 ch , sn , dn はそれぞれJacobiの積円関数である。さらに、 d と C^* の次式で表される。

$$\begin{aligned} d &= \{ (3(H/k)^4/4k^2) \}^{1/2} \left[1 + ((1/8k) (H/k)) \{ (2(E/F) + 5k^2 - 10) - ((1/28k^4) (H/k)^2 \{ (2(E/F) + 5k^2 - 10) \}) \}, C^* = 1 + ((1/2k) (H/k)) \right] \\ &\quad \{ 2 - 3(E/F) - k^2 \} + (3/20k^2) (H/k)^2 (6k^2 - 6 - k^4) + ((1/40k^2) (H/k)^2 (E/F)) \{ 97(E/F) - 45k^2 - 83 \} \end{aligned} \quad (4)$$

- 大粒子の軌跡 図-1の座標系と式(3)を用いければ、次式によつて、Euler座標での水粒子速度ベクトル $U = (U_x + U_y)$ をLagrange座標での速度ベクトル $U = (U^x + U^y)$ に変換することができる。

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + \int_0^t U(\mathbf{r}, t') dt, t) = U(\mathbf{r}, t) + \{ \int_0^t U dt' \} \nabla U + \frac{1}{2} \{ \int_0^t U dt' \}^2 \nabla^2 U + \dots \quad (5)$$

$$U/\text{km} = (H/k) \{ \text{ch}^2 \theta - (E/F - 1/k^2) / k^2 \} + (1/4k^2) (H/k)^2 \{ 7k^2 - 3k^4 - 4 + (E/F) \{ 8 - 4(E/F) - 5k^2 \} - 3k^2(1 - k^2)z^2 \} + (1/4k^2) (H/k)^2 \{ 7k^2 - 6 + 2(E/F) - 6(2k^2 - 1)z^2 \}. \quad (6)$$

$$Cn^2 \theta + (H/k)^2 (9z^2/4 - 1) \text{ch}^4 \theta - (2/z^2) (H/k)^2 \{ (E/F)(\theta - \theta_0) + E(\theta_0) - E(\theta) \}, W/\text{km} = z \{ (3(H/k)^3/k^2) \}^{1/2} \{ 1 + ((1/8k) (H/k)) \{ 16(E/F) + 19k^2 - 22 \} \} \text{ch} \theta \text{sn} \theta \text{dn} \theta - (8/z^2) C^* \{ (3(H/k)^5/k^2) \}^{1/2} \{ (E(\theta) - E(\theta_0) - (E/F)(\theta - \theta_0)) \} \{ 3k^2 \text{ch}^2 \theta - 4k^2 \text{ch}^2 \theta + 2k^2 \theta - 1 \} - (35/2) C^* \{ (H/k)^3 \} \{ \text{ch}^2 \theta - \text{cn}^2 \theta \} \text{ch} \theta \text{sn} \theta \text{dn} \theta \quad (7)$$

ここに、 $\theta_0 = d x^*$ であり、 $E(\theta)$ はJacobiのE関数である。

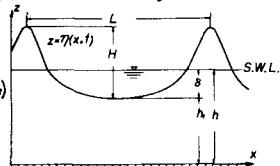


図-1 座標系と記号

式(5)の変換が十分正確であるには、 $\int u dt$ が時間 t に関係なく十分に小さいことが必要である。そこで、Longuet-Higgins の方法と計算機による厳密計算の 2通りの計算を行ない、 $U(x,t)$ を $u(x,t)$ で展開することの妥当性について検討し、クリード波の水粒子の軌跡の特性を調べることとした。

$$\text{Longuet-Higgins の方法: } T = U + \int u dt = U + \int u(U(t)) dt + \int u(U(t)) dt \quad (7)$$

計算機による方法: $\int u dt$ は 1 周期の間必ずしも十分小さくはないとして、1 周期 T を N 個に分割し、 N ごとの積分計算を行ない、各 step ごとに定まる水粒子位置 x_i として、つぎの計算を行なう。

$$T = \sum V_m = \sum P_m + \int_{t_0}^{t_1} U dt = \sum P_m + \int_{t_0}^{t_1} [U(\sum V_m, t) + \int_{t_0}^{t_1} U(\sum P_m, t) dt] dt \quad (8)$$

式(7)と(8)の計算結果を図-2 に示す。ここで、実線は式(7)によるものであり、また 1 点鎖線は式(8)によるものである。厳密計算における分割数に関しては、 $N=10$ と $N=20$ の場合でその差異はたしかに 1% であることから、その結果を十分厳密なものとしてよい。式(7)および(8)の差異はその傾向において significant に行なう。ただし、式(7)および(8)の傾向はともに軌跡は大きく曲がる。局一の例に対して T の増大とともに水粒子の軌跡がより偏平になり、上下非対称性となることとクリード波の特性からも理解される。また、軌跡および質量輸送の鉛直方向の変化は、 $T=10$ になると Stokes 波のように bottom に近づくに従って下へ向かう傾向を示す。一方、従来の定義に従って計算される質量輸送速度 u_m は表-1 に示すようにある。この式と Le Méhauté による表-1 に示す表示との比較を図-3 に示す。

4. クリード波の質量輸送 前述したように、速度の定義で液体運動の内部が拘束され、このため u 定義を用いれば、Euler 座標で考える限りでは、液体の平均輸送速度がゼロとなり、輸送現象は水面形と水粒子速度との coupling によって生じるが、 u 定義では、平均流が生じてこの輸送量を打ち消す結果となるものと考えられる。しかししながら、これらは前述したように速度の定義に左右されてしまうので、一般に Euler 座標で波動理論が展開され、また種々の物理量も求められているのに對し、質量輸送のみ Lagrange 座標で考えねばならぬということに若干の疑問がある。一方、著者らの理論では液体内部における平均輸送速度 u_m および 1 時間あたりの総輸送量を算出することができる。われわれが質量輸送現象を問題とするのは、ある場所で波によどれだけ液体が輸送されるかという輸送量とそれに対する平均輸送速度である。それ故、式(3)に基づいて Euler 座標における質量輸送を考慮するこ

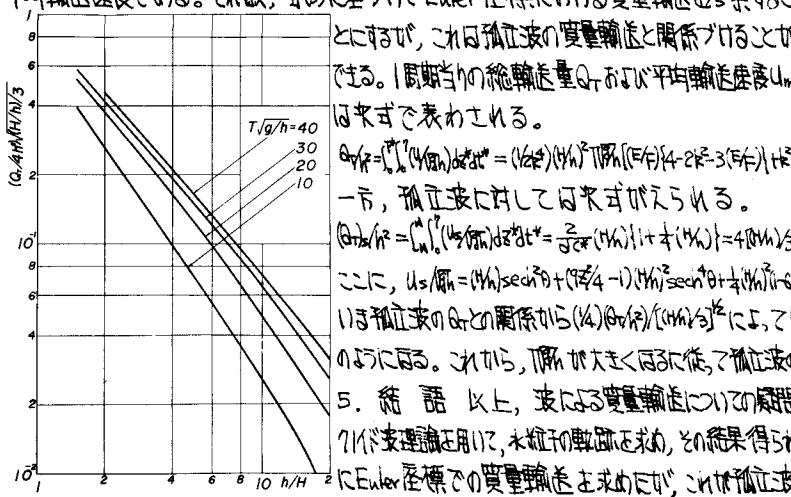


図-4 質量輸送量

参考文献: (1) 堀・安田: 新しいクリード波理論, 地震年度工学講演会講演概要

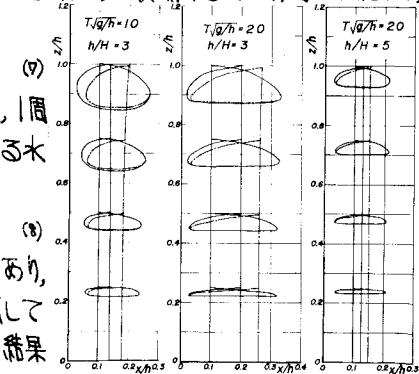


図-2 水粒子の軌跡

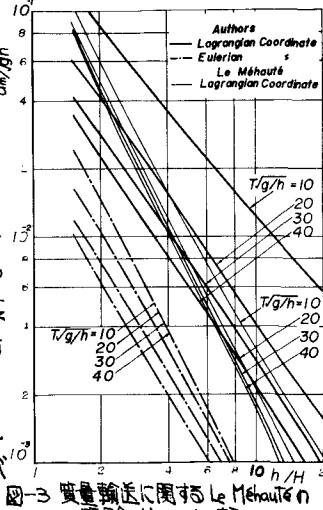


図-3 質量輸送に関する Le Méhauté 理論式との比較

(7)

とに対するが、これは孤立波の質量輸送と関係づけることができる。周期当たりの総輸送量 Q および平均輸送速度 u_m は表-3 に示す。一方、孤立波に対しては式(4)がえられる。

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} (u_s \sin \theta) dt = \frac{1}{2} \sin(\theta) \left[(t_1 - t_0)^2 - 2t_0^2 - 3t_0 t_1 + \frac{3}{4} t_1^2 \right] = \frac{1}{2} \sin(\theta) \left[(t_1 - t_0)^2 - \frac{3}{4} t_0^2 - \frac{3}{2} t_0 t_1 + \frac{3}{16} t_1^2 \right] \quad (9)$$

ここに、 $u_s = \sqrt{h} \sin \theta + (\frac{\pi}{4} - 1) \sqrt{h} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sqrt{h} \sin^3 \theta$, $t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{h} \sin \theta + \frac{3}{4} \sqrt{h} \sin^2 \theta$ による孤立波の u_s との関係から $(t_1 - t_0)^2 / (t_1 - t_0)^2$ によって無次元質量輸送として表わせば、図-4 のようになる。これから、 T が大きくなるに従って孤立波の場合に対して、輸送量が最大となる傾向がある。

5. 緒語 以上、波による質量輸送についての結果を参考するとともに、著者らの提案したクリード波理論にて、水粒子の軌跡を求め、その結果得られた質量輸送速度について考察し、これら Euler 座標での質量輸送を求めて、これが孤立波のものに接続していくことを明確にする。