II-4　波による質量輸送に関する一試論

東京大学工学部土木工学科　正員　堀川 清司
同上　学生員　○水口 優
佐賀県　品川 正典

§1　基本的な考え方

運動方程式、即ちナヴィエストークス方程式において、波高及び平均水位の波動伝播方向の変化に伴って生じるポテンシャル解の変化が、オイラー的な定常流れに対応し、全体としての質量輸送は、それと、ポテンシャル解によるラグランジェ的なものとの和としてあらわされるものとする。但し、ここでは、2次元で水平床の場合の進行波を扱う。

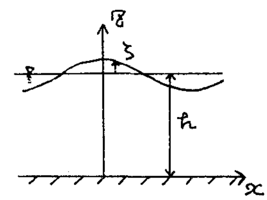
又、ここでは、底面と表面の境界層を除いた部分について考え、しかも、現象は十分に平衡に達しており、オイラー的な定常流れは存在するものとする。

§2　方程式の展開

上記の考え方に基づくと、問題は、次のように定式化される。但し、座標は、図－1のようにとる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uw}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\nabla^2 u \qquad ①$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial uw}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\nabla^2 w \qquad ②$$



図－1

そこで、次のように置く。

$$u=U_E+u',\quad w=w' \qquad ③$$

$$u'=a\sigma/\sinh kh\cdot\cosh kz\cos(kx-\sigma t) \qquad ④$$

$$w'=a\sigma/\sinh kh\cdot\sinh kz\sin(kx-\sigma t) \qquad ⑤$$

即ち、ポテンシャル解として、$\zeta=a\cos(kx-\sigma t)$ に対応する微小振幅波を用いる。ここで、波の振幅 a、波数 k、水深 h は、それぞれ、x の関数である。又、$|U_E|\ll|u|_{max}$ を仮定する。以下では、便宜上、右肩上のダッシュは省略し、$kx-\sigma t=\theta$ と書く。

②式を、$[z,\ h+\zeta]$ で積分し、表面で圧力がゼロであることを考慮すると、微小項を無視して、

$$p/\rho=g(h-z)+a^2\sigma^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+g\zeta\frac{\cosh kz}{\cosh kh}-w^2+\int_z^{h+\zeta}\frac{\partial uw}{\partial x}dz \qquad ⑥$$

時間平均をとり、x 方向で微分すると次式を得る。

$$\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial p}}{\partial x}=g\frac{dh}{dx}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{w^2} \qquad ⑦$$

①式の時間平均をとり、⑦式を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{u^2-w^2}+g\frac{dh}{dx}=\nu\nabla^2 U_E \qquad ⑧$$

そこで、$\overline{u^2-w^2}=a^2\sigma^2/2\sinh^2 kh$ となることを用いると、次式を得る。

$$\frac{d}{dx}\left(a^2\sigma^2/2\sinh^2 kh+gh\right)=\nu\nabla^2 U_E \qquad ⑨$$

ここで、$\partial^2U_E/\partial x^2\ll\partial^2U_E/\partial z^2$ を仮定すると、⑨式は、簡単に、次のようになる。

$$\frac{d}{dx}\left(a^2\sigma^2/2\sinh^2 kh+gh\right)=\nu\frac{\partial^2U_E}{\partial z^2} \qquad ⑩$$

即ち、⑩式において、左辺が z によらないことから、U_E は z に関して2次式となり、次のように書ける。

$$U_E=f_0(x)+f_1(x)\cdot z+f_2(x)\cdot z^2 \qquad ⑪$$

§3　質量輸送速度

ラグランジェ系の質量輸送は、微小振幅波では、次式で与えられる。

$$U_L = \frac{a^2\sigma k}{2\sinh^2 kh}\cdot\cosh 2kz \qquad ⑬$$

境界条件としては、Longuet-Higgins (1952) によって、表面及び底面の境界層を解いて得られた次式、

$$z=0 \text{ で} \quad U_E+U_L = \frac{5}{4}\,a^2\sigma k/\sinh^2 kh \qquad ⑬$$

$$z=h \text{ で} \quad \partial(U_E+U_L)/\partial z = 4a^2\sigma k^2\coth kh \qquad ⑭$$

を用い、さらに、平衡状態を仮定していることより、連続の条件として

$$\int_0^h (U_E+U_L)\,dz = 0 \quad 。 \qquad ⑮$$

以上3条件より、f_0, f_1, f_2は一意的に定まり、

$$U_E = \frac{a^2\sigma k}{4\sinh^2 kh}\left\{3 + kh\sinh 2kh\cdot\left(\frac{3z^2}{k^2}-\frac{2z}{k}\right) + 3\left(3+\frac{\sinh 2kh}{kh}\right)\cdot\left(\frac{z^2}{2k^2}-\frac{z}{k}\right)\right\} \qquad ⑯$$

を得る。これは、Longuet-Higgins によって得られた Conduction Soln. と同じものである。

§4. 波高減衰と平均水位勾配及び実験との比較

⑩式に、$\sigma^2 = gk\tanh kh$ を用い、$f_0(x)$に⑯式より得られる値を代入し、微小項を略すると、

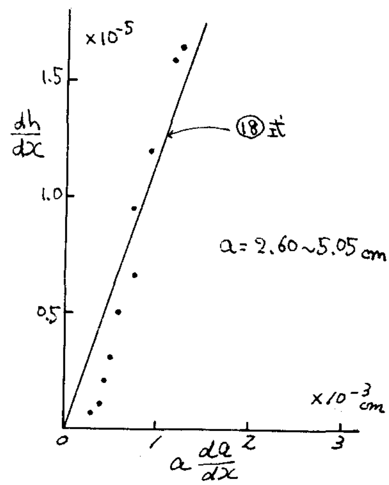
$$\frac{2k}{\sinh 2kh}\cdot a\frac{da}{dx} + \frac{dh}{dx} = \frac{3k^2a^2\nu}{2\sigma k^2}\left(1/kh + 2kh + 3/\sinh 2kh\right) \qquad ⑰$$

となり、波高減衰と平均水位勾配の関係をあらわす。

品川は、静水位 30 cm、周期 1.0 秒の条件で、波高を変化させて、実験を行い、波高減衰と平均水位を測定した。この条件の時 ⑰式は、

$$\frac{dh}{dx} \sim -1.2\times10^{-2}\, a\cdot\frac{da}{dx} + 2.2\times10^{-8}\cdot a^2 \qquad ⑱$$

となる。図－2は、この式と実験値を比較したものである。但し、⑱式の最後の項の絶対値は小さい。



図－2

§5 結論及び考察

質量輸送そのものに関する結果は、⑯式がLonguet-Higginsの結果と同じであるため、検討を略する。結論としては、図－2、⑯式、境界条件⑬、⑭式の妥当性に関するいろんな議論より、この扱いは妥当であるといえよう。但し、⑯式は、$kh\to\infty$で表面での値が、kh に比例するという欠点をもつ。このことは、直接的には、境界条件⑭による。ここでは、⑨式から⑩式に至る仮定から、おおざっぱにいって、その適用範囲は、$kh \ll L/a$ である。但しLは波長。

さて、現象としての進行波は、全ての量が一意的に定まっていくはずであるが知られているように、波高減衰は底面境界層における粘性減衰のみでは説明し尽くされえず、この扱いにおいても、その差を埋めることはできなかった。即ち、⑰式と連立させるべきものを見出すことが今後の課題であろう。

§6 あとがき

品川は、同様の考え方を重複波に適用して、質量輸送としては、Longuet-Higginsと同じ結果を、平均水位は、

$$h = a_0^2k/\sinh 2kh\cdot\cos 2kx + h_0 \qquad ⑲$$

を得ている。但し、a_0は重複波の1/4波高、h_0は静水位である。そして、実験を行った結果、⑲式とのよい一致を見ている。

参考文献

1) 品川 正典 「波による質量輸送速度の鉛直分布に関する研究」 東大工学部土木工学科修論(1974).

2) H.S. Longuet-Higgins 「Mass transport in water waves」 Phil. Trans. Roy. Soc. London A. No.903. Vol.245.