

1. 緒言 近年、波動論の進展とともに、せつ動法を用いた種々の有限振幅波の高次解が展開されてきた。たとえば、フノイド波理論については、Friedrichs や Keller により高次近似への道が開かれ、Laitone および Chappellear によりそれぞれ第2および第3近似解が求められている。しかし、これらの近似解は相互の表示方法が異なるために、その相互関係は必ずしも明確でない。そこで、本研究ではフノイド波の第2近似解に対して、若干の計算を行ない、波の諸特性に関する両者の理論の相互関係を解析的に検討する。なお、これらのフノイド波理論を比較する場合、波速の計算に用いた定義を同一にする必要があるため、ここでは Chappellear のフノイド波理論として土屋らが Stokes の波速に対する第2定義により、再計算したものを採用することにする。

2. フノイド波の第2近似解 波の谷からの水深 h を平均水深 $\bar{h}$ に換算し、水平および鉛直座標 X , Z を平均水面上にとり直した Laitone によるフノoid波の第2近似解は、図-1 に示す定常化した座標系のもとで、波速 C , 波長 L , 水位変動 η , 水平および鉛直水粒子速度 u , w に対してそれぞれ次式で与えられる。

$$C/\sqrt{gh} = 1 + (M_1 - N_1/2)(H/h) + (M_2 + M_1 N_1/2 - N_1^2/8 - N_2/2)(H/h)^2 \quad (1)$$

$$L/h = 4\pi K/\sqrt{3(H/h)} \left\{ 1 + \{(7\kappa^2 - 2)/8\kappa^4 - (3/2)N_1\}(H/h) \right\} \quad (2)$$

$$\eta/h = (Cn^2 - N_1)(H/h) + \{-(3/4)Cn^2 + (3/4)Cn^4 - N_2\}(H/h)^2 \quad (3)$$

$$u/\sqrt{gh} = 1 + (1 - 1/2\kappa^2 - N_1/2 - Cn^2)(H/h) - \{(N_1/2)(1 - 1/2\kappa^2 - Cn^2) + N_1^2/8 + N_2/2 + (2/\kappa^6 - 6\kappa^2/9)/40\kappa^6 - [(7\kappa^2 - 2)/4\kappa^4 + (3/2)(2 - 1/\kappa^2)\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}]Cn^2 + [5/4 + (9/4)\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}]Cn^4 - (3/4)(1/\kappa^2 - 1)\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}\}(H/h)^2 \quad (4)$$

$$w/\sqrt{gh} = (1 + Z/h)\sqrt{(3/\kappa^2)(H/h)^3} \operatorname{sn} cn \operatorname{dn} \left\{ 1 + [(5/2)N_1 - (5\kappa^2 - 2)/8\kappa^4 - \{1 - (1/2\kappa^2)\}\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}] \right. \\ \left. - (1/2)Cn^2 + (3/2)\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}Cn^2\right\}(H/h) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= (1/\kappa^2)(1/2 - E/K), \quad M_2 = (1/\kappa^2)[-(1/40)(\kappa^6 + 14\kappa^2/9) + (E/K)\{E/K + (3/4)\kappa^2 - 1\}], \\ N_1 &= (1/\kappa^2)(\kappa^2 + E/K), \quad N_2 = (1/4\kappa^2)\{2(1 - \kappa^2) - (2 - \kappa^2)(E/K)\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 H : 波高, g : 重力の加速度, κ : だ円関数の母数, K および E : 第1種および第2種完全だ円積分, $\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(2\pi X/L)$, $\operatorname{cn} = \operatorname{cn}(2\pi X/L)$, $\operatorname{dn} = \operatorname{dn}(2\pi X/L)$: Jacobi のだ円関数である。

一方、第2定義を用いた Chappellear の第2近似解はそれぞれ次式で表わされる。

$$C/\sqrt{gh} = 1 + \{L_3 + L_0(1 - E/K)\} + \{(\kappa^2/2)L_0^2 + (2 - \kappa^2)L_0^2(E/K) + (E/K)^2L_0^2 + 5L_0L_3(1 - E/K)\} \quad (7)$$

$$L/h = 4\pi/\sqrt{3L_0} \quad (8)$$

$$\eta/h = \{2L_3 + L_0(\kappa^2/2) - L_0\kappa^2\operatorname{sn}^2\} + [L_3^2 + (3/20)L_0^2(12\kappa^4 + 23\kappa^2 + 12) + 6L_0L_3(1 + \kappa^2) - \{(5/2)L_0^2\kappa^2(1 + \kappa^2) + 6L_0L_3\kappa^2\}\operatorname{sn}^2 + (3/4)L_0^2\kappa^4\operatorname{sn}^4] \quad (9)$$

$$u/\sqrt{gh} = 1 + (L_3 + L_0\kappa^2\operatorname{sn}^2) + [L_0^2\kappa^2(1 + \kappa^2)\operatorname{sn}^2 + 5L_0L_3\kappa^2\operatorname{sn}^2 + L_0^2\kappa^4\operatorname{sn}^4 + (1 + Z/h)^2\{-(3/4)L_0^2\kappa^2 + (3/2)L_0^2\kappa^2(1 + \kappa^2)\operatorname{sn}^2 - (9/4)L_0^2\kappa^4\operatorname{sn}^4\}] \quad (10)$$

$$w/\sqrt{gh} = (1 + Z/h)(2\kappa^2/\sqrt{3L_0}) \operatorname{sn} cn \operatorname{dn} \left\{ (3/2)L_0^2 + \{(3/4)(1 + Z/h)^2L_0^3(1 + \kappa^2 - 3\kappa^2\operatorname{sn}^2) + (3/2)L_0^3(1 + \kappa^2) + (15/2)L_0^2L_3 + 3\kappa^2L_0^3\operatorname{sn}^2\} \right\} \quad (11)$$

ここに、 L_0 および L_3 は微小なパラメータであり、つぎの式より κ および H/h の関数として求められる。

$$H/h = \kappa^2 L_0 \{1 + (1/4)L_0(10 + 7\kappa^2) + 6L_3\} \quad (12)$$

$$\{2L_3 + L_0(\kappa^2 E/K)\} + [L_0^2\{-(1/5)(1 - 6\kappa^2/9\kappa^4) + 2(1 + \kappa^2)(E/K)\} + 6L_0L_3(\kappa^2 E/K) + L_3^2] = 0 \quad (13)$$

ただし、式(11)は第2近似に対して与えられるものであるが、式(5)との比較のために示すものである。

3. 第2近似解による波の諸特性の相互関係 1) まず、Chappellear の理論解の微小パラメータ L_0 および L_3 が

それぞれ H/h のべき級数として次式で展開されるものとする。

$$L_0 = a_1(H/h) + a_2(H/h)^2 + \dots \quad (14) \quad L_3 = b_1(H/h) + b_2(H/h)^2 + \dots \quad (15)$$

式(14)および(15)を式(12)および(13)に代入し、 $(H/h)^2$ まで考慮すれば、 L_0 および L_3 は次式になる。

$$L_0 = (1/\kappa^2)(H/h) - (1/4\kappa^2)(10 - 5\kappa^2 - 12E/K)(H/h)^2 \quad (16)$$

$$L_3 = -(1/2\kappa^2)(\kappa^2 + E/K)(H/h) + (1/40\kappa^4)\{-6\kappa^4 + 26\kappa^2 + 4\} + 5(E/K)(-3\kappa^2 + 2 - E/K)\}(H/h)^2 \quad (17)$$

つぎに、式(16)および(17)を式(7)~(11)に代入し、計算を行えば、微小パラメータ L_0 および L_3 が直接現れない形の波の諸特性を表わす式がつぎのように得られる。

$$C/\sqrt{gh} = 1 + (1/2\kappa^2)(2 - \kappa^2 - 3E/K)(H/h) + (1/40\kappa^4)\{-16 + 16\kappa^2 - 4\kappa^4 + 5(E/K)(2 - \kappa^2 + 3E/K)\}(H/h)^2 \quad (18)$$

$$L/h = 4\kappa K/\sqrt{3(H/h)}\{1 + (1/8\kappa^2)(10 - 5\kappa^2 - 12E/K)(H/h)\} \quad (19)$$

$$\eta/h = \{cn^2 - (1/\kappa^2)(1 - E/K)\}(H/h) + (1/4\kappa^4)\{2(\kappa^2 - 1) + (2 - \kappa^2)(E/K) - 3\kappa^4 cn^2 + 3\kappa^4 cn^4\}(H/h)^2 \quad (20)$$

$$U/\sqrt{gh} = 1 + \{1/2\kappa^2)(\kappa^2 - E/K) - cn^2\}(H/h) + \{(1/40\kappa^4)\{-6\kappa^4 - 4\kappa^2 + 4 + 5(\kappa^2 - 2 - E/K)(E/K)\} + (1/4\kappa^2)(5\kappa^2 - 2E/K) \quad (21)$$

$$cn^2 - (5/4)cn^4 + 3\{2(Z/h) + (Z/h)^2\}\}(1/4\kappa^2)(1 - \kappa^2) + (1/2\kappa^2)(-1 + 2\kappa^2)cn^2 - (3/4)cn^4\}(H/h)^2 \quad (21)$$

$$W/\sqrt{gh} = (1 + Z/h)\sqrt{3(\kappa^2)(H/h)^3} \operatorname{sn} cn \operatorname{dn} \left\{ 1 + (1/8\kappa^2)\{-18 + 11\kappa^2 + 16E/K - 4\kappa^2 cn^2\} + 4\{2(Z/h) + (Z/h)^2\} \right. \quad (22)$$

$$\left. (1 - 2\kappa^2 + 3\kappa^2 cn^2)\right\}(H/h) \quad (22)$$

一方、式(16)を Laitone による式(11)~(14)に代入すれば、こゝらは Chappellear による式(18)~(21)に完全に一致することがわかる。また、式(15)による鉛直水粒子速度は、

$$W/\sqrt{gh} = (1 + Z/h)\sqrt{3(\kappa^2)(H/h)^3} \operatorname{sn} cn \operatorname{dn} \left\{ 1 + (1/8\kappa^2)\{-22 + 15\kappa^2 + 20E/K - 4\kappa^2 cn^2\} + 4\{2(Z/h) + (Z/h)^2\} \right. \quad (23)$$

$$\left. (1 - 2\kappa^2 + 3\kappa^2 cn^2)\right\}(H/h) \quad (23)$$

となり、式(22)と若干相違する。しかし、孤立波の場合には、式(22)および(23)において、 $\kappa=1$ 、 $E/K=0$ 、 $\operatorname{sn}=\tanh$ 、 $cn=\operatorname{sech}$ および $\operatorname{dn}=\operatorname{sech}$ とすれば、いづれの式も

$$W/\sqrt{gh} = (1 + Z/h)\sqrt{3(H/h)^3} \tanh \operatorname{sech}^2 \left\{ 1 + (1/8)\{-7 - 4\operatorname{sech}^2\} + 4\{2(Z/h) + (Z/h)^2\} \right. \quad (24)$$

$$\left. (-1 + 3\operatorname{sech}^2)\right\}(H/h) \quad (24)$$

となる。ここに、 $\operatorname{sech}=\operatorname{sech} \alpha x$ 、 $\tanh=\tanh \alpha x$ および $\alpha=\{\sqrt{H/h}/2h\}\{1 - (5/8)(H/h)\}$ である。この原因としては鉛直水粒子速度に関して、Chappellear の理論はオ3近似で $(H/h)^{5/2}$ まで考慮しているのに対して、Laitone のそれはオ2近似解で $(H/h)^{5/2}$ まで含めているためであると考えられる。

4. 数値的検討 つぎに、両者の本来の形の理論解を用いて数値計算を行ない、その特性を比較しよう。図-2は波速に対する数値計算結果の1例を示したものであり、図中の点線は微小振幅波理論によるものである。図から明らかのように、 h/H の値が大きい場合には両者は一致するが、 h/H の値が大きくなると Chappellear による結果の方が Laitone のそれより若干大きくなる。また、図-3は波の峯の位相での水平水粒子速度の鉛直分布を示すものである。岩垣らがすでに指摘したように、Laitone による水平水粒子速度の鉛直分布は $T\sqrt{g/h}$ (T : 周期) の値が大きくなり、しかも h/H の値が小さい場合、水底から水面に向て急激に増大する分布形を示すのに対して、Chappellear のそれは増加の割合が小さい。

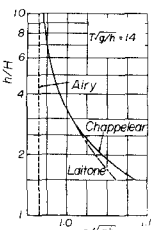


図-2

4. 結 語 以上の計算により、Laitone および Chappellear によるクノイド波のオ2近似解はそれぞれ波の諸特性を H/h のべき級数で表すれば、鉛直水粒子速度を除いて一致することがわかる。しかし、両者の近似度を比較するならば、同次数の近似に対して、Laitone の解は Chappellear の解の展開パラメータである L_0 および L_3 を H/h で展開し、さらに、その最初の2項を用いていることになるので、現象との対応はさておき、Chappellear の解の方がより近似度が高いといえよう。最後に、本研究の実施にあたり、熱心な御指導を賜った京大防災研究所土屋義人教授に感謝する。

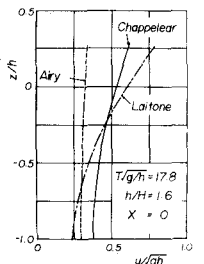


図-3