

熊本大学工学部 正 員 〇秋吉 卓
熊本大学工学部 学生員 古川和義

1. まえがき 地盤を離散的な系へ置換する場合に有限要素法理論が多く用いられているが、この地盤のみからなる系あるいは地盤と構造物からなる系の振動解析において常に問題になるのが境界の取扱いであろう。振動が正弦定常的な場合は、境界において位相特性を考慮して処理を行なって半無限地盤と等価にすることが報告されているが^(1,2) 任意波形外力に対する過渡解析は容易ではないため有限要素法による利点が十分活かされていないようである。本研究では、大胆な単純化を行なって地盤内各要素の剛性マトリクスを導き、これより波動の透散性を考慮した過渡応答解析を行なったのでここに報告する。

2. 解析過程 地盤は等方均質な弾性体として図-1のように等分割を行なう。各要素とも力と変形は水平成分のみを考えるものとするとき、要素 e における剛性マトリクス $[k]^e$ は次式で与えられる。

$$[k]^e = \frac{Gat}{6b} [k]_T + \frac{Gabt}{6a} [k]_L \quad \text{----- (1)}$$

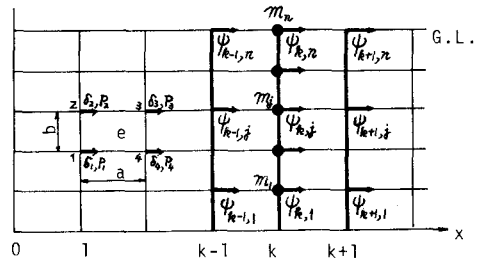


図-1 表層地盤の要素分割モデル

$$\text{ここに、} [k]_T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, [k]_L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

および、 $\alpha = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, G : セン断弾性係数, ν : Poisson比, t : 要素厚, a, b : 要素辺長。

ここでは簡単のために要素内の変形を体積変化のみによると仮定すると、上記 $[k]^e$ としては $[k]_L$ の項のみを用いられる。このとき図-1のように左端より第 k 列目の節点反力ベクトル $\{R\}_k$ は次式で与えられる。

$$\{R\}_k = -\frac{G\alpha bt}{6a} [K^*] \{\psi\}_{k-1} + \frac{G\alpha bt}{3a} [K^*] \{\psi\}_k - \frac{G\alpha bt}{6a} [K^*] \{\psi\}_{k+1} \quad \text{----- (2)}$$

したがって、第 k 列目の各節点における集中massに関する運動方程式は次式のように書ける。

$$[M] \{\ddot{\psi}\}_k + \{R\}_k = 0 \quad \text{すなわち} \quad [M] \{\ddot{\psi}\}_k + [A]_{k-1} \{\psi\}_{k-1} + [A]_k \{\psi\}_k + [A]_{k+1} \{\psi\}_{k+1} = 0 \quad \text{----- (3)}$$

ここに、 $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}$, $\{\psi\}_k = \{\psi_{k,1}, \psi_{k,2}, \dots, \psi_{k,n}\}^T$, ($k=1, 2, 3, \dots$) および

$$[A]_{k-1} = -\frac{G\alpha bt}{6a} [K^*], [A]_k = \frac{G\alpha bt}{3a} [K^*], [A]_{k+1} = [A]_{k-1}, \quad [K^*] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 4 & 1 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

そこで、 $t=0$: $\{\psi\}_k = \{\dot{\psi}\}_k = 0$, ($k=1, 2, 3, \dots$)なる初期条件のもとで、式(3)の両辺のLaplace変換を行なうと次式をうる。

$$[A]_{k-1} \{\bar{\psi}(s)\}_{k-1} + (s^2 [M] + [A]_k) \{\bar{\psi}(s)\}_k + [A]_{k+1} \{\bar{\psi}(s)\}_{k+1} = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ここで、上記の $[M^*]$ に関するmodal matrix $[Q]$ を用いると、 $\{c\}$ を未定係数ベクトルとして、 $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ は

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = [Q] [\bar{x}(s)]_k \{c\}, \quad \text{ただし} \quad [\bar{x}(s)] = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{x}_n(s) \end{bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

と表わされる。さらに各列要素の伝達特性(共通)を $[\bar{G}(s)] = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{G}_n(s) \end{bmatrix}$ とすると、 $[\bar{x}(s)]_k$ は次式で表わせる。

$$[\bar{x}(s)]_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{x}_n(s) \end{bmatrix} = [\bar{G}(s)]^k = [\bar{G}^k(s)], \quad \text{ただし} \quad [\bar{G}^k(s)] = \begin{bmatrix} \bar{G}_1^k(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{G}_n^k(s) \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

したがって、式(5)、(6)を式(4)に代入すると次式のように変形される。

$$\left\{ [A]_{k+1} [Q] [\bar{G}^{k+1}(s)] + \{S^2[M] + [A]_k\} [Q] [\bar{G}^k(s)] + [A]_{k+1} [Q] [\bar{G}^{k+1}(s)] \right\} \{c\} = 0 \quad \text{-----}(7)$$

そこで modal matrix $[Q] = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ および固有値 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ が

$$([K^*] - \omega^2 [M^*]) \{Q\} = 0 \quad \text{-----}(8)$$

$$\text{を満足し、かつ } [Q] \text{ は } [Q]^T [M^*] [Q] = [I], [Q]^T [K^*] [Q] = [\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{-----}(9)$$

のように正規化されているものとする。

$$\text{ただし、} [M] = m_0 [M^*], m_0 = \rho a b t, \omega_i^* = \omega_i / \omega_0, \omega_0 = \sqrt{\alpha / G} \cdot V_t / a, V_t: \text{横波速度}, [M^*] = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

そこで、式(7)の左側より $[Q]^T$ を乗すると、 $[\bar{G}(s)]$ に関する次の特性方程式をうる。

$$\left\{ -[\omega^2] + \left\{ \frac{S^2}{\omega_0^2} [I] + 2[\omega^2] \right\} [\bar{G}(s)] - [\omega^2] [\bar{G}^k(s)] \right\} [\bar{G}^{k+1}(s)] \{c\} = 0 \quad \text{-----}(10)$$

この特性方程式が有意な解を持つためには、上式の()の行列式が0でなければならない。したがって、

$$\prod_{j=1}^n \left\{ \bar{G}_j^2(s) - 2 \left(2 \frac{S^2}{\omega_j^2} + 1 \right) \bar{G}_j(s) + 1 \right\} = 0, \quad (\omega_j \equiv 2\omega_j \text{ とおく}) \quad \text{-----}(11)$$

$$\text{これより、} \bar{G}_j(s) = \frac{2S^2}{\omega_j^2} + 1 \pm \frac{2S}{\omega_j} \sqrt{\frac{S^2}{\omega_j^2} + 1} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(\sqrt{S^2 + \omega_j^2} \pm S \right)^2, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \text{-----}(12)$$

しるかに、 $\bar{G}_j(s)$ の複号は Laplace 逆変換の収束性を考慮すると、負号を採用すべきである。したがって左側境界における変位ベクトルが $\{\bar{\psi}(s)\}$ と与えられるときは、未知係数列 $\{c\}$ は

$$\{c\} = [Q]^T [M^*] \{\bar{\psi}(s)\}. \quad \text{-----}(13)$$

として決定されるので、第 k 列目の変位ベクトル $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ は式(5)、(13)より次式で表わされる。

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = [Q] [\bar{X}(s)]_k \{c\} = [Q] [\bar{G}^k(s)] \{c\} = [Q] [\bar{G}^k(s)] [Q]^T [M^*] \{\bar{\psi}(s)\}. \quad \text{-----}(14)$$

この式(14)の両辺を Laplace 逆変換することにより、次の解析的表示をうる。

$$\{\bar{\psi}(t)\}_k = [Q] [G(t)]_k * [Q]^T [M^*] \{\psi(t)\}. = [Q] \int_0^t [G(\tau)] [Q]^T [M^*] \{\psi(t-\tau)\} d\tau \quad \text{-----}(15)$$

$$\text{ただし、} [G(t)]_k = \begin{bmatrix} G_{1k}(t) \\ G_{2k}(t) \end{bmatrix}_k, G_{jk}(t) = \frac{1}{2} J_{2k}(\omega_j t), (j=1, 2, \dots, n), J_{2k}(): 2k \text{ 次の第1種 Bessel 関数.}$$

なお $[G(t)]_k$ は第 k 列目の各 mode 毎の荷重関数に相当している。

1例として左端境界に正弦定常変位、 $\{\psi(t)\}_0 = g_0 \{H_j\} \sin \omega t$ を与

えた場合は、式(15)より地盤の応答変位は次式のようになる。

$$\{\psi(t)\}_k = 2g_0 [Q] \begin{bmatrix} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{1}{2} J_{2k}(\omega_j \tau) d\tau \\ \int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{1}{2} J_{2k}(\omega_j \tau) d\tau \end{bmatrix} [Q]^T [M^*] \{H_j\} \quad \text{-----}(16)$$

したがって、0点まわりの地盤の回転反力 $R_0(t)$ は次式で与えられる。

$$R_0(t) = g_0 \frac{Gat}{6b} \{H_j\}^T \left(2 \sin \omega t [I] + [M^*] [Q] \left[\int_0^t \sin \omega(t-\tau) \frac{1}{2} J_{2k}(\omega_j \tau) d\tau \right] [Q]^T [M^*] \{H_j\} \right) \quad \text{-----}(17)$$

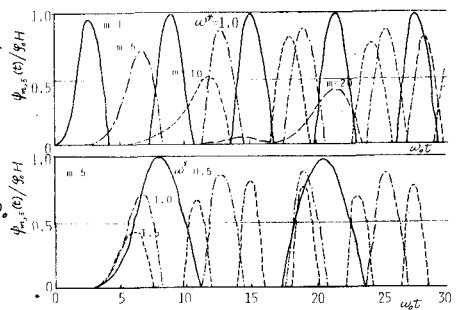


図-2 地盤の応答変位 ($g \equiv m$)

図-2より、低振動数のとき定常に達しやすく、遠地点ほど過渡状態が長引く様子は、波の伝播特性をよく示しているが、wave front の

現われ方は連続体解析の結果とは若干異なる。

参考文献 1) J. Ayemmar: ASCE, EM1, Feb. 1972, pp. 85-105, 2) 秋吉

河津・太1: 昭和47年度土木学会西部支部研究発表会, 昭和48年2月, 3) 斎藤・小坪: 昭和48年度土木学会西部支部研究発表会, 昭和49年2月。