

広島大学工学部 正員 佐藤 誠
 “ 学生員 岡本 享久

1. はじめに

粘弾性体内の波動伝播特性の1つは、入射パルスの波面が通過した後の領域で、応力緩和あるいは変形遅延の現象により、伝播速度が時間と共に変化することである。線型粘弾性モデルを対象とすると、ダッシュポットのみを並列に配置したモデル以外では、非緩和時のバネに対応する弾性波の伝播速度を超えることはない。そのため逐次積分を行なう数値解析においては弾性波動解を求めるための安定性の条件で十分と考えられる。しかし粘弾性数値解析では一般に弾性解析の場合と比較して長時間を要するので、粘弾性パラメータに対応した安定性の条件が求められることが望ましい。以下では一般に最も多用される3-parameter modelを対象として弾性解の場合との違いを粘弾性波動方程式の差分近似について示す。

2. 粘弾性体の応力-ひずみ関係

線型粘弾性体の応力-ひずみ関係は線型微分演算子 P, Q, P', Q' を用いて stress deviator と不変量に対して以下のように書ける。

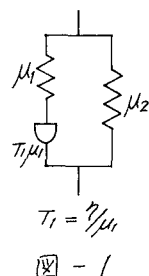
$$P \sigma_{ij} = Q \epsilon_{ij}, \quad (1) \quad P' \sigma_{ii} = Q' \epsilon_{ii}. \quad (2)$$

ここで体積弾性係数 K が弾性体の場合と同じであると仮定すると $Q'/P' = 3K$ となり、

$$\sigma_{ij} = \frac{Q}{P} \epsilon_{ij} + \left(K + \frac{Q}{3P} \right) \delta_{ij} \epsilon_{kk}. \quad (3)$$

弾性体の場合には、 μ をせん断弾性係数として $Q/P = 2\mu$ である。図-1に示す3-parameter model に対しては非緩和時のせん断弾性係数を $\mu_u (= \mu_1 + \mu_2)$ 、緩和時のそれを $\mu_r (= \mu_2)$ として $m\mu_u = \mu_r$ とするとき、弾性体のラメの定数に対応する μ_v, λ_v は $\partial_0 = \partial/\partial t$ とすると次式となる。

$$\mu_v = \mu_u (m + T_1 \partial_0) / (1 + T_1 \partial_0), \quad (4) \quad \lambda_v = K - \frac{2}{3} \mu_v \quad (5)$$



3. 線型粘弾性体の波動方程式

物体力を無視した運動方程式 $\rho \ddot{u} = \sigma_{ij,j}$ に対して、(4), (5) を代入すると、

$$(1) \text{ plane strain: } \rho \ddot{u}_\alpha = (\lambda_v + \mu_v) u_{r,r\alpha} + \mu u_{\alpha,r r} \quad (6)$$

$$(2) \text{ plane stress: } \rho \ddot{u}_\alpha = \frac{\mu_v (3\lambda_v + 2\mu_v)}{\lambda_v + 2\mu_v} u_{r,r\alpha} + \mu u_{\alpha,r r} \quad (7)$$

($\alpha, r = 1, 2$)

(7) を一般の2次元表示にすると次式となる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9\mu_v K}{3K + 4\mu_v} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{9\mu_v K}{3K + 4\mu_v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \mu_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

(6) について縦波伝播に対応するスカラーポテンシャル φ についての2次元表示は、(4)を代入して、

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + T_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = C_1'^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + C_1'^2 T_1 \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial t} \right). \quad (9)$$

$$\text{ここに、} \quad C_1'^2 = \frac{K + \frac{4}{3}\mu u}{\rho}, \quad C_1'^2 = \frac{K + \frac{4}{3}\mu u m}{\rho}.$$

である。一方(8)に(4)を代入すると、

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_3 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} &= A_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_5 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + A_6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + A_7 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_8 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial t} \\ &+ A_9 \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial t^2} + A_{10} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} + A_{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad A_1 &= \rho(3K + 4\mu u m), \quad A_2 = 2\rho T_1 \{3K + 2\mu u(1+m)\}, \quad A_3 = \rho T_1^2 (3K + 4\mu u), \\ A_4 &= 4\mu u m (3K + \mu u), \quad A_5 = 4\mu u T_1 \{3K(1+m) + 2\mu u m\}, \quad A_6 = 4\mu u T_1^2 (3K + \mu u), \\ A_7 &= 9\mu u K m, \quad A_8 = 9\mu u K T_1 (m+1), \quad A_9 = 9\mu u K T_1^2, \\ A_{10} &= m\mu u (3K + 4\mu u m), \quad A_{11} = \mu u T_1 \{3K(m+1) + 8\mu u m\}, \quad A_{12} = \mu u T_1^2 (3K + 4\mu u). \end{aligned}$$

である。

(10)'

(10)の陽型差分近似は $t = t_0 + \Delta t$, $x = i \Delta x$, $y = j \Delta y$ とすると(10)'を適当に考慮して次式となる。

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= B_1 (2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}) + B_2 (3u_{i,j}^n - 3u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j}^{n-2}) + B_3 (4u_{i,j}^n - 6u_{i,j}^{n-1} + 4u_{i,j}^{n-2} - u_{i,j}^{n-3}) \\ &+ B_4 (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + B_5 (u_{i+1,j}^n - u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^n + 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^n - u_{i-1,j}^{n-1}) \\ &+ B_6 (u_{i+1,j}^n - 2u_{i+1,j}^{n-1} + u_{i+1,j}^{n-2} - 2u_{i,j}^n + 4u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-2} + u_{i-1,j}^n - 2u_{i-1,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-2}) \\ &+ B_7 (v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n - v_{i-1,j+1}^n + v_{i-1,j-1}^n) + B_8 (v_{i+1,j+1}^n - v_{i+1,j+1}^{n-1} - v_{i+1,j-1}^n \\ &+ v_{i+1,j-1}^{n-1} - v_{i-1,j+1}^n + v_{i-1,j+1}^{n-1} + v_{i-1,j-1}^n - v_{i-1,j-1}^{n-1}) + B_9 (v_{i+1,j+1}^n - 2v_{i+1,j+1}^{n-1} \\ &+ v_{i+1,j+1}^{n-2} - v_{i+1,j-1}^n + 2v_{i+1,j-1}^{n-1} - v_{i+1,j-1}^{n-2} - v_{i-1,j+1}^n + 2v_{i-1,j+1}^{n-1} - v_{i-1,j+1}^{n-2} \\ &- 2v_{i-1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^{n-2}) + B_{10} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) + B_{11} (u_{i,j+1}^n - u_{i,j+1}^{n-1} \\ &- 2u_{i,j}^n + 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^n - u_{i,j-1}^{n-1}) + B_{12} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j+1}^{n-1} + u_{i,j+1}^{n-2} - 2u_{i,j}^n \\ &+ 4u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-2} + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j-1}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-2}). \end{aligned} \quad (11)$$

(11)の安定性の条件は Amplification matrix $[G]$ のスペクトル半径から求められるが、この場合 $[G]$ の固有方程式は4次式となる。同様に(9)については3次式となり、いずれも弾性体の場合のように代数的に安定性の条件を求めることには無理がある。したがって粘弾性パラメーターそれぞれに対してこの条件を求める方が合理的であろう。この結果と波動伝播の結果をあわせて講演当日発表する。