

山梨大学工学部 正員 深沢 泰晴
山梨大学大学院 学生員 ○太田 貞次

1. はじめに

薄肉ばりが衝撃的外力を受けた場合に生ずる *sharp transient* な曲げねじれ振動現象の解明には、慣用の曲げねじれ理論に基づく振動解析では、短波長波の伝播速度は無限大となり、振動波は発散現象を呈してしまうため満足な結果は得られない。これははりの曲げ振動の場合と同様である。

この欠陥を補うため、Aggarwal & Cranch は I および C 型ばりの曲げねじれ振動にもりわゆる Timoshenko Beam Theory の拡張を試み、その曲げねじれ振動波の伝播の基礎的特性を明らかにした²⁾。深沢は任意形状の薄肉多角断面のはりに対して同様な解析が一般的な形で可能であることを示した²⁾。しかしながら、個々の構成板断面の平均せん断変形を未知関数とするこの解法には、板帯数が多くなると計算が煩雑になること、また曲線形状のような任意形状の薄肉ばりには適用できないことの二つの欠点がある。

著者等は薄肉間断面の場合、曲げおよび曲げぬじれに伴なうせん断ひずみとも、断面の薄肉中心線に沿った分布は、一般に著しい変動を示さない点に着目し、薄肉中心線の全長にわたっての平均せん断変形を用いることによって、任意形状の薄肉間断面ばりについて曲げおよび反りせん断変形を考慮した振動解析を比較的容易に行ない得ることを示した³⁾すなわち、上記の二つの問題点はともにほぼ克服されたことになる。

今回はこのような解析法によって、一軸対称の数種の代表的な薄肉断面ばりについて、その曲げねじれ振動における自由振動波の伝播に関する基礎的検討を行なった結果を報告する。

2. 曲げおよび反りせん断変形を考慮した薄肉ばりの基礎方程式

図-1に示すように、間断面薄肉ばりか荷重 $q_x, q_y, m_x, m_y, m_z, m_w$ の作用を受けるとき、曲げせん断変形および曲げねじりせん断変形(反りせん断変形)を考慮した静的つりあいの微分方程式は、仮想仕事の原理を用いてつぎのように得られる³⁾;

$$\left. \begin{aligned} K_x G F (\mathcal{U}' + \psi_y) + g_x &= 0 \\ K_x G F \mathcal{U}' + E J_y \psi_y'' - K_x G F \psi_y - m_y &= 0 \\ K_y G F (\mathcal{V}'' - \psi_x') + g_y &= 0 \\ K_y G F \mathcal{V}' + E J_x \psi_x'' - K_y G F \psi_x - m_x &= 0 \\ (1 + K_w) G J_T \varphi'' - K_w G J_T \vartheta' + m_z &= 0 \\ K_w G J_T \varphi' + E C_w \vartheta'' - K_w G J_T \vartheta - m_w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (1)}$$

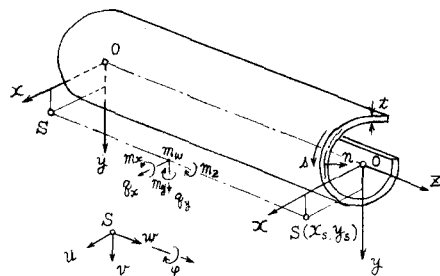


図-1 開断面薄肉ばりの一般図

ここに、 u 、 v はせん断中心 S の x 、 y 方向変位、 ψ_x 、 ψ_y は x 、 y 軸まわりの断面の平均回転角、 $\varphi = \varphi(x)$ はねじり率 φ' に代わる新しい関数。ダッシュ (') は x に関する微分の意。さらに、 K_x 、 K_y は曲げせん断補正係数、 K_w は反りせん断補正係数を意味し、次式で計算される；

$$\frac{1}{K_x} = \frac{F}{J_y} \int_F \frac{S_y^2}{\lambda^2} dF, \quad \frac{1}{K_y} = \frac{F}{J_x} \int_F \frac{S_x^2}{\lambda^2} dF, \quad \frac{1}{K_w} = \frac{J_T}{C_w} \int_F \frac{S_w^2}{\lambda^2} dF \quad (2)$$

二二五、

$$S_x = \int_0^4 y t \, ds \quad , \quad S_y = \int_0^4 x t \, ds \quad , \quad S_w = \int_0^4 w t \, ds$$

問題の振動方程式は、式(1)の荷重項を次式で表わされる慣性力で置き換えて得られる：

$$q_x = -\rho F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad q_y = -\rho F \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - x_A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad m_x = \rho J_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$m_y = \rho J_y \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad m_z = -\rho F (y_s \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - x_s \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + I_s^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}), \quad m_w = \rho C_w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \left. \vphantom{m_y} \right\} \text{----- (3)}$$

ここに、 ρ は材料の密度、 I_s は次式で与えられる；

$$I_s = \frac{1}{F} \int_A \{ (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 \} dA$$

結局、式 (1), (3) より曲げおよび反りせん断変形を考慮した振動方程式はつぎのように書ける；

$$\left. \begin{aligned} K_x G F \left(\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + y_s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right) &= 0, & K_x G F \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + E J_y \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - K_x G F y_s - \rho J_y \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} &= 0 \\ K_y G F \left(\frac{\partial^4 z}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) - \rho F \left(\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} - x_s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right) &= 0, & K_y G F \frac{\partial^4 z}{\partial z^4} + E J_z \frac{\partial^4 z}{\partial z^4} - K_y G F x_s - \rho J_z \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} &= 0 \\ (1+K_w) G J_T \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - K_w G J_T \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - \rho F \left(y_s \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - x_s \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + I_s^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} \right) &= 0, & K_w G J_T \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + E C_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - K_w G J_T \varphi - \rho C_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

3. 自由振動波の波動解析

断面が x 軸に関して対称な一軸対称断面の場合 ($y_s = 0$) について自由振動波の波動解析を行なう。すなわち Phase Velocity C_p で伝播する正弦波を考え、波長を λ とすると、曲げねじれ振動の成分に対しつぎのように書くことができる；

$$v = A_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - C_p t), \quad \psi = A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - C_p t), \quad \varphi = A_3 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - C_p t), \quad \vartheta = A_4 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - C_p t) \quad \text{----- (5)}$$

式 (4), (5) より、固有値問題として Phase Velocity C_p を定める次式が得られる；

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 - K_y & -K_x & -\left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 & 0 \\ K_y & 4\pi^2 \frac{E}{G} \left(\frac{I_s}{\lambda}\right)^2 + K_y - 4\pi^2 \left(\frac{I_s}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 \left(\frac{x_s}{I_T}\right)^2 & 0 & -(1+K_w) + \alpha \left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 & -K_w \\ 0 & 0 & K_w & 4\pi^2 \beta \frac{E}{G} \left(\frac{I_s}{\lambda}\right)^2 + K_w - 4\pi^2 \beta \left(\frac{I_s}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{C_p}{C_2}\right)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{----- (6)}$$

ここに、 $C_2 = \sqrt{G/\rho}$, $I_x = \sqrt{J_y/F}$, $I_T = \sqrt{J_T/F}$, $\alpha = (I_s/I_T)^2$, $\beta = (F C_w)/(J_T J_T)$

4. 数値計算結果

Phase Velocity C_p と波長 λ の関係を一軸対称の3種の断面形について計算した結果の一例を図-2 に実線で示す。

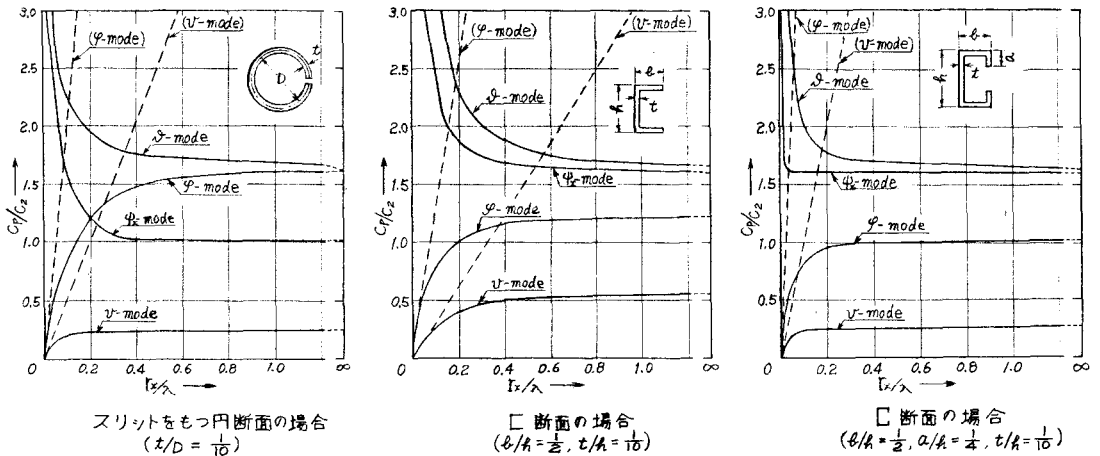


図-2 曲げねじり振動波の Phase Velocity

す。同図中の破線は曲げおよび反りせん断変形を無視した慣用の曲げねじれ理論に基づく解析結果を表わしている。短波長波すなわち高周波振動の領域では、後者の波速は振動数とともに増大し、振動波形はくずれていき、いわゆる発散現象を呈してしまう。前者の場合には4つの波列が振動数にはほとんど無関係に一定速度で伝播することがうかがえる。したがって、衝撃問題のように Time delay が意味をもつ問題の解析がはじめて可能になる。

文献 1) Aggarwal, H.R. & E.T. Gratch: Journal of Applied Mechanics, 1967-6. 2) 深沢泰晴: 土木学会学術講演会概要集, 昭48-10. 3) 深沢・太田: 土木学会関東支部研究発表会概要集, 昭49-5.