I-245　縦衝撃波のテンソル的伝播機構とその位相速度について

東北大学工学部
正会員
多谷虎男

§1　棒状固体弾性体内の衝撃波の伝播に関する理論

凡ての振動現象は、従来解析が行われて来た様なスカラー振動ではなく、テンソル振動として解析されねばならない。　固体弾性体内の弾性波は境界条件の如何を問わず、常に次の二つのNavierの方程式を満足しなければならない。　即ち

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\phi &= 2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^4\phi + div.\mathbf{X} \\ \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\boldsymbol{\Psi} &= G\nabla^4\boldsymbol{\Psi} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} (1)$$

茲にφは変位場のスカラー・ポテンシャル、$\boldsymbol{\Psi}$はベクトル・ポテンシャルを表し、$\mathbf{X}$は単位体積当りの質量力を示すものとする。

上式(1)は、テンソル方程式であるから、坐標系の如何を問わず、凡ての場合に成立する。今、角柱棒について、その横断面内の二辺に平行する中心線をx、y坐標軸に、縦方向中心線をZ軸に採れば　棒の一端に与えられた衝撃による弾性波のスカラー・ポテンシャルφ及び、ベクトル・ポテンシャル$\boldsymbol{\Psi}$は次の様に仮定することが出来る。

$$\phi = U_0(x, y)\exp[i(\gamma Z - pt)] \quad \text{-----------} (2)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{Bmatrix} U(y) \\ V(x) \\ 0 \end{Bmatrix}\exp[i(\gamma Z - pt)] \quad \text{-----------} (3)$$

簡単のために質量力のない場合を考えることとし、(2)式を(1)式に代入してその偏微分方程式を解き次式を得る。

$$U_0(x, y) = C_0\cosh(\gamma x) + D_0\cosh(\gamma y) + E_0\cosh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}) + H_0\cosh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}) \quad \text{----} (4)$$

但し、C_0, D_0, E_0, H_0は凡て常数とする。

又、(3)式を(1)式に代入して　その偏微分方程式を解き次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} U(y) &= B_2\sinh(\gamma y) + C_2\sinh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2}) \\ V(x) &= B_1\sinh(\gamma x) + C_1\sinh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2}) \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} (5)$$

(4)式(5)式における　$C_0\cosh(\gamma x)$, $B_2\sinh(\gamma y)$ 及び $B_1\sinh(\gamma x)$ は(1)式を満足するが((1)式は必要条件式に過ぎない)必要且つ充分なNavierの方程式

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(grad\ \phi) - c_1^2\nabla^2(grad\ \phi)\right\} + \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rot\ \boldsymbol{\Psi}) - c_2^2\nabla^2(rot.\ \boldsymbol{\Psi})\right\} = 0 \quad \text{-------} (6)$$

を満足しないので棄てる。従って、この場合の解は結局、次の様になる。

$$\phi = \left\{E_0\cosh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}) + H_0\cosh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\right\}\exp[i(\gamma Z - pt)] \quad \text{--------} (7)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{Bmatrix} C_2\sinh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2}) \\ C_1\sinh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2}) \\ 0 \end{Bmatrix}\exp[i(\gamma Z - pt)] \quad \text{-----------} (8)$$

$$
\mathbf{u}=\left[\begin{Bmatrix}\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}\cdot E_0\sinh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\\ \sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2}\cdot H_0\sinh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\\ i\gamma\{E_0\cosh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})+H_0\cosh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_1^2})\}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-i\gamma C_1\sinh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2})\\ i\gamma C_2\sinh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2})\\ \sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2}\{C_1\cosh(x\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2})-C_2\cosh(y\sqrt{\gamma^2-\gamma_2^2})\}\end{Bmatrix}\right]
$$

$$
\cdot\exp[i(\gamma z-pt)] \qquad \text{-------}(9)
$$

上に得た(9)式について次の5つの場合に分けて、境界条件式 $[\sigma_{xx}]_{x=a}=0$, $[\sigma_{yy}]_{y=b}=0$, $[\sigma_{zx}]_{x=a}=0$, $[\sigma_{yz}]_{y=b}=0$, $[\sigma_{xy}]_{x=a}=0$ 及び $[\sigma_{xy}]_{y=b}=0$ の凡てを満足するか否かを吟味するに、(詳細は省略)

(1) $\left(\gamma=\dfrac{p}{c}\right)<\left(\gamma_1=\dfrac{p}{c_1}\right)$ なる場合： $\left(但し、c_1^2=\dfrac{2G}{\rho}\left(\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\right),\quad c_2^2=\dfrac{G}{\rho}\right)$

(2) $\gamma=\dfrac{p}{c}=\dfrac{p}{c_1}=\gamma_1$ なる場合：

(3) $\left(\gamma_2=\dfrac{p}{c_2}\right)>\left(\gamma=\dfrac{p}{c}\right)>\left(\gamma_1=\dfrac{p}{c_1}\right)$ なる場合：

(4) $\gamma=\dfrac{p}{c}=\dfrac{p}{c_2}=\gamma_2$ なる場合：

(5) $\left(\gamma=\dfrac{p}{c}\right)>\left(\gamma_2=\dfrac{p}{c_2}\right)>\left(\gamma_1=\dfrac{p}{c_1}\right)$ なる場合：

上記5つの場合の内、(2)の場合のみは実際上存在し得るが 他は凡て実際上存在しないことがわかる。(2)の場合縦方向衝撃波の位相速度は、c_1 で従って角柱棒での縦方向衝撃波の位相速度は c_1 に限ることが分る。一般に縦衝撃波の位相速度は角柱棒に限らず 円柱棒其他 不整形断面の棒においても c_1 である。これは従来 定説となっている Pochhammer の理論に反駁を加えるもので 棒の振動更には 棒状結構体の振動の基礎として 極めて重要な意義を持つものと考えられる。 著者は円柱棒についても解析を行っているが、ここでは省略する。

§4 実験結果 当日、多数の検証的実験結果について、スライドを用いて説明を行う。

§5 結論

棒の中に生ずる縦波の速度は、従来公式の様に $c_0=\sqrt{Eg/\rho}$ ではなく $c_1=\sqrt{\dfrac{2G}{\rho}\left(\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\right)}$ であって、棒の形状に関りなく、棒の材料が同一な限り、一定であることが 実験、解析の両面で明瞭にされた。

参考文献

1. A.E.H. Love : "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge University Press, London, 1934.
2. H. Kolsky : "Stress Waves in Solids", Dover Publications Inc., New York, 1963.
3. Hermann Schlichting : "Boundary Layer Theory", McGraw Hill Co., New York, 1960.
4. Y.C. Fung : "Foundation of Solid Mechanics", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1965.
5. Wilhelm Flügge : "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.