

京都大学工学部 正員 丹羽義次

同上 正員 小林昭一

同上 正員 橋本卓雄

動的弾性境界値問題に対する Betti-Rayleigh の相反定理の適用の例として、地中を移動する荷重による地表の振動を解析する。図 1 に示すように、弾性半空間 $\bar{z}_3 > 0$ の中で、物体力 f の一定速度 C_0 で $\bar{z}_1$ 軸に平行に移動する問題を考える。簡単のため $f_1 = f_1(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{t})$ かつ $f_2 = 0$ の場合を考える。このことは平面ひずみ問題となり、運動方程式は次のように書ける。

$$\bar{L}u \equiv \begin{bmatrix} C_1^2 \bar{\partial}_1 \bar{\partial}_1 + C_2^2 \bar{\partial}_3 \bar{\partial}_3 - \bar{\partial}_t \bar{\partial}_t & (C_1^2 - C_2^2) \bar{\partial}_1 \bar{\partial}_3 \\ (C_1^2 - C_2^2) \bar{\partial}_1 \bar{\partial}_3 & C_2^2 \bar{\partial}_1 \bar{\partial}_1 + C_1^2 \bar{\partial}_3 \bar{\partial}_3 - \bar{\partial}_t \bar{\partial}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 u は変位ベクトル、 $\bar{\partial}_i = \partial/\partial \bar{z}_i$ ($i=1, 3$)、 $\bar{\partial}_t = \partial/\partial \bar{t}$ 、 C_1 は縦波の速度、 C_2 は横波の速度、 ρ は弾性体の密度であり、せん断弾性定数を μ 、Poisson 比を ν とするときは、 $C_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ 、 $C_1 = C_2 [(1-2\nu)/2(1-\nu)]^{1/2}$ 。荷重が長時間にわたって一定速度で移動し続けている場合には、同じ速度で移動する座標系 (x_1, x_2, x_3) から見たときには荷重の近傍は定常状態にあるものと考えられるべきである。従って、運動方程式 (1) は Galilei 変換 $x_1 = \bar{z}_1 + C_0 \bar{t}$ 、 $x_3 = \bar{z}_3$ 、 $t = \bar{t}$ により次のように変換される。

$$L u \equiv \begin{bmatrix} (C_1^2 - C_0^2) \partial_1 \partial_1 + C_2^2 \partial_3 \partial_3 & (C_1^2 - C_2^2) \partial_1 \partial_3 \\ (C_1^2 - C_2^2) \partial_1 \partial_3 & C_2^2 \partial_1 \partial_1 + C_1^2 \partial_3 \partial_3 - \partial_t \partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

このとき、境界上の応力ベクトル t は、境界の外側の単位法線ベクトルを n とするとき

$$t = \bar{L} \cdot n \quad (3)$$

ここで、 $\bar{L}$ は応力テンソルでその成分は、変位により次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \rho [(C_1^2 \partial_1 u_1 + (C_1^2 - 2C_2^2) \partial_3 u_3)] \\ \tau_{33} &= \rho [(C_1^2 - 2C_2^2) \partial_1 u_1 + C_1^2 \partial_3 u_3] \\ \tau_{13} &= \rho [C_2^2 (\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3)] \end{aligned} \quad (4)$$

いま、考えられている領域 B およびその境界 ∂B 上で、二つの系 $[u, t, n]$ および $[u', t', n']$ を考えると、次のような相反関係が成立する。

$$\int_B [u' \cdot (L u) - u \cdot (L u')] dV = \int_{\partial B} (u' \cdot t - u \cdot t') dS$$

すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [u'(x_1, x_3) \cdot f(x_1, x_3) + u(x_1, x_3) \cdot f'(x_1, x_3)] dx_3 dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [u'(x_1, 0) \cdot t(x_1, 0) - u(x_1, 0) \cdot t'(x_1, 0)] dx_1 \quad (5)$$

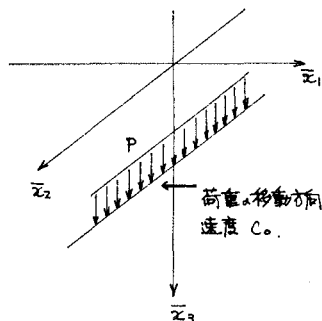


図 1.

表面での変位を求めるとき、式(5)において、 $[u, f, z] = [u(x_1, x_3), f(x_1, x_3), 0]$ および
 $[u', f', z'] = [u'(x_1, x_3; \xi), 0, q \delta(x_1 - \xi)]$ と考えれば、

$$q u(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u'(x_1, x_3; \xi) \cdot f(x_1, x_3) dx_3 dx_1 \quad (6)$$

ここに、 q は 適当な単位方向ベクトルである。

例題 表面からの深さ h ところを、線荷重が移動する場合。

荷重が鉛直の場合には、 $f_1 = 0$ 、 $f_3 = P \delta(x_1) \delta(x_3 - h)$ 、従って、 z 変位成分 u_3 を求める場合には $u_1' = 0$ 、 $u_2' = \delta(x_1 - \xi)$ による変位成分 u_3' を、 u_3 を求めるためには、 $u_1' = 0$ 、 $u_2' = \delta(x_1 - \xi)$ による変位成分 u_3' を求めればよい。丹羽・小林によれば、求めるべき変位 u は次のようになる。ただし、 $C_0 < C_2$ の場合。

$$\frac{\pi u u_1(\xi, 0)}{P} = -K_1 \tan^{-1}\left(\frac{-\xi}{\alpha_2 h}\right) + \alpha_1 K_3 \tan^{-1}\left(\frac{-\xi}{\alpha_1 h}\right)$$

$$\frac{\pi u u_3(\xi, 0)}{P} = -\frac{1}{2} \{ \alpha_1 K_1 \log(\xi^2 + \alpha_1^2 h^2) - K_2 \log(\xi^2 + \alpha_2^2 h^2) \}$$

$$\text{ここに、} H_1 = C_0/C_1, H_2 = C_0/C_2, \alpha_1 = \sqrt{1-H_1^2}, \alpha_2 = \sqrt{1-H_2^2}$$

$$K_1 = \frac{2-M_2^2}{(2-M_2^2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}, K_2 = \frac{2\alpha_1}{(2-M_2^2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}$$

$$K_3 = \frac{2\alpha_2}{(2-M_2^2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2}$$

数値的な結果を図2~4に示す。図2上では、 u_1 について $x_1 = 3b$ のとき $u_1 = 0$ となるように、 u_3 については $x_1 = -b$ のとき $u_3 = 0$ となるように描いている。地上の一点においては変位波は図2の左から右へAの形で進行する波であり、波形を時間微分すれば、加速度を得ることができる。

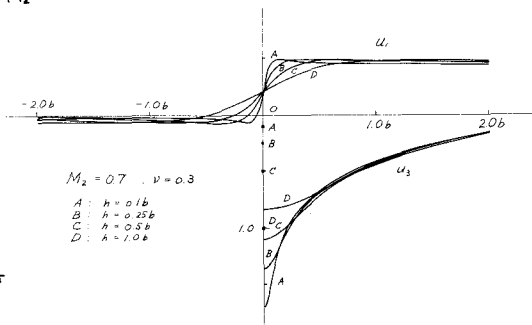
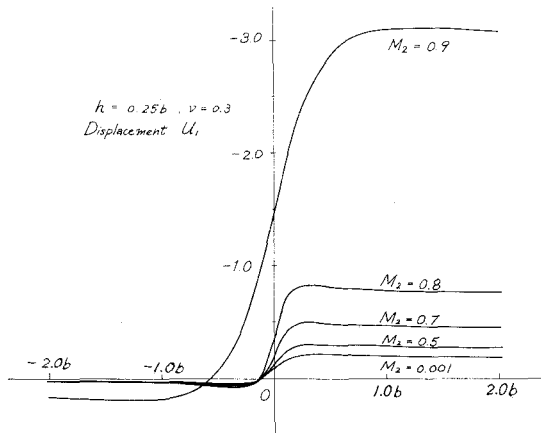


図 2

○ NIWA, Y and S. KOBAYASHI, Stresses Produced in an Elastic

Half-Plane by Moving Loads along Its Surface, Memo. Faculty of Eng. Kyoto Univ.

Vol. 18, P. 3, (1966).



← 図 3

図 4 →

