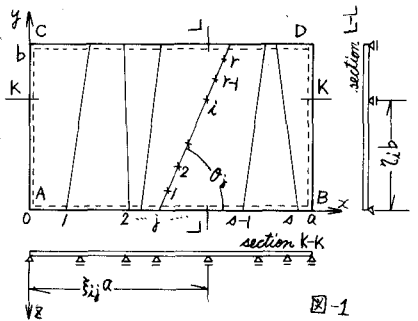


長崎大学工学部 正員 高橋和雄
 (株)片山鉄工所 正員 夏秋義広
 九州大学工学部 正員 櫛木 武

1 緒言 平板が補剛材などで補強された連続板の固有振動数をあらかじめ予測することは、振動体や移動荷重を支える床組の設計に際してきわめて重要なことである。従来多くの研究者により、連続板の動的挙動が解明されているが、補剛材が板の辺に対して斜めに配置される連続板の振動解析はエネルギー法による近似解法が提案されているのみで、未だ十分とは言えないようである。著者らは連続板の振動問題に関する研究を行なっているが、すでにその成果の一部として板の辺に対して平行に配置された補剛材で支えられた連続板の振動解析¹⁾を報告している。つづいて本論文では周辺が単純支持され、中間に斜めに配置された剛支承で支えられる連続板(図-1参照)の固有値を剛支承の代わりに、等間隔の有限個の点支持に置き換えて求める近似解法を提案するものである。ここでは、著者らの提案する方法の概略を述べ、つづいて2・3の連続板構造について本法による結果と既往のエネルギー法による結果および実験値との比較・対照など併せ行なうものである。

2 解法 長方形板ACDBにおいて、図-1に示すような座標系(x, y)を導入する。また、板は周辺の他に辺ABと辺CDを結ぶn個の剛支承に支えられており、これらに番号1, 2, …, nを付す。長方形板が振動すれば、各支承には線状分布をなす垂直反力を生ずるが、これを直接取り扱うことは困難であるから、剛支承を等間隔に配列されたr個の点支持に置き換えれば、本題の連続板は点支持された無梁板の振動と同一とみなすことができ、板の強制振動に関する微分方程式を解けば、板のたわみwに関する一般解が次式のように表わされる。



$w = W \sin(\omega t + \varepsilon)$ (1) ここに、 w : 板のたわみ ω : 固有円振動数 ε : 初期位相角 t : 時間

$$W = (A_x \sin \bar{x}_1 \xi + B_x \cos \bar{x}_1 \xi + C_x \sinh \bar{x}_1 \xi + D_x \cosh \bar{x}_1 \xi) \sin N \pi \xi + (A_y \sin \bar{x}_2 \eta + B_y \cos \bar{x}_2 \eta + C_y \sinh \bar{x}_2 \eta + D_y \cosh \bar{x}_2 \eta) \sin M \pi \eta$$

$$+ \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{ij} \Gamma_{ij}(m, n) \sin m \pi \xi \sin n \pi \eta / K_{mn} \quad (2) \quad \bar{x}_1 = \sqrt{x^2 - (N \pi a)^2}, \bar{x}_2 = \sqrt{x^2 - (N \pi a)^2}, \bar{x}_3 = \sqrt{x^2 - (M \pi b)^2}, \bar{x}_4 = \sqrt{x^2 - (M \pi b)^2}, \xi = x/a, \eta = y/b, \mu = b/a \text{ (辺長比)}, \lambda = a^2 \rho h \omega^2 / E \text{ (固有値)}, Q: \text{板の} x \text{方向の長さ}, b: \text{板の} y \text{方向の長さ}, D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$$

板剛度, h : 板厚, E : 板の弾性係数, ν : 板のポアソン比, ρ : 板の密度, $W_{ij} = -4a^2 V_{ij} / (\pi^2 \mu D)$, $\Gamma_{ij}(m, n) = \sin m \pi \xi_{ij} \sin n \pi \eta_{ij}$, $\xi_{ij} = (1 - \tan \theta_j) / 2 + i \mu \tan \theta_j / (r+1)$, $\eta_{ij} = y_j / (b+1)$, a_{ij} : 支点 i, j の x 座標値, b_{ij} : 支点 i, j の y 座標値, r : 支点の数, θ_j : 支承の配列角度, W_{ij} : i 番目の支点の垂直反力, $M, N = 1, 2, 3, \dots$, $A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y$: 積分定数, $K_{mn} = (m^2 + \mu^2 n^2)^2 - (\lambda/\pi)^2$

ところで、本題の長方形板は周辺で単純支持されているから、その境界条件は次のように表わされる。

$$\xi = 0.1 \text{ で } W = 0, \frac{dW}{d\xi} = 0 \quad \eta = 0.1 \text{ で } W = 0, \frac{dW}{d\eta} = 0 \quad (3)$$

また、点支持される座標では、板のたわみは零であることから次の拘束条件式がえられる。

$$W(\xi_{ij} a, \eta_{ij} b) = 0 \quad (4) \quad \text{式(2)を式(3)および式(4)に代入すれば、未知数}(A_x \cdots D_x, A_y \cdots D_y, W_{11}, \dots, W_{nr}) \text{を求め}$$

の連立方程式をうるが、未知数のうち少なくとも一つが零でない解が存在するためには連立方程式の係数行列式の値が零でなければならないことより、本題の振動数方程式が次のように得られる。

$$\begin{vmatrix} \langle K \rangle_{44} & \langle O \rangle_{44} & \langle O \rangle_{4r} \\ \langle O \rangle_{44} & \langle K \rangle_{44} & \langle O \rangle_{4r} \\ \langle K \rangle_{r4} & \langle K \rangle_{r4} & \langle H \rangle_{r4} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $\langle K \rangle_{44}$, $\langle K \rangle_{r4}$: 4行4列の行列, $\langle O \rangle_{44}$: 4行4列の零行列
 $\langle K \rangle_{r4} + \langle K \rangle_{r4}$: r 行4列の行列, $\langle O \rangle_{4r}$: 4行 r 列の零行列
 $\langle H \rangle_{r4}$: r 行 r 列の行列

なお、式(6)を計算するにあたり、これを直接解く代わりに、式(6)、式(7)の3つに分けて解くことが実用上好都合である。
 $|K_{11}| = 0$ $|K_{22}| = 0$ (6) $|H_{11}|_{\omega=0} = 0$ (7) ここで、式(6)の解は周辺単純支持長方形板の固有値で、式(5)の必要条件であるが十分条件ではなく、これよりえられる固有値群の中には本題の固有値として不要なものも含まれているので注意を要する。式(7)からえられる固有値は全て式(5)の固有値であり、本例の固有値は垂直反力の項より独立に算定される。

3計算例 図-1において、辺長比 b/a なる周辺単純支持長方形板が1本の剛支承にて支えられる2スパン連続板について、本法によ、7固有値および振動モードを求めれば次のとおりである。なお、支承の配列角度は $90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ および対角線とし、支承の中央が板の中央に合致するものとする。また、剛支承を置換する点支持の個数について収束計算を行な、た。すなわち、点支持の個数を順次増加させていき、えられた固有値の小数点以下3桁目が収束する値を本題の固有値とみなした。計算結果を5次まで示せば表-1の結果をうる。表-1において右肩に*印を付した固有値は式(6)から求められたことを明らかにし、また*印のない固有値は式(7)からえられたことを示すものである。なお、 θ 内の数値は収束に要した支点数の数である。 $\theta=90^\circ$ の場合には既往の方法により厳密解が、また、 $90^\circ, 60^\circ$ および 45° の場合にはエネルギー法による結果および実験値が報告されているが、比較・対照のためにこれらを併記すれば表-1のとおりである。表より 90° の場合には本法が厳密解ときわめてよく合致しており、本法が連続板の固有値の算定に有効であることが立証される。また、エネルギー法および実験値も厳密解と良好な一致を示しているようである。次に配列角度が 90° からはなれてくると、エネルギー法との差が増加し、次数が高くなるほど顕著になるが、その割合は高々3%程度で斜支承の場合でも、両者が実用的に十分な精度で合致していることがわかる。各ケースについて、本法と実験値とを比較してみると、配列角度の大きさの変動による影響はほとんど見受けられず、 90° の場合と同程度とみなすことができる。固有値が明らかとなれば振動モードが算出可能となる。 $\theta=60^\circ$ の1次から4次までの振動モードを示せば図-2(a)(d)に示すとおりである。図-3は2次振動について収束に要した支点数の数と固有値の収束率との関係を支承の配列角度をパラメータにプロットしたものである。 $\theta=90^\circ$ および対角線の場合には支承反力の分布は板の端部で零となるなめらかな曲線で表わされるが、両者の中間の場合には、端部で反力の大きさが最大で、中央部では絶対値が小さい分布をするため、収束に要する支点数を多く要するものと考えられる。最後にエネルギー法および実験結果を提供された植枝研林洋一氏に感謝の意を表します。

次数	1	2	3	4	5
90°	(a) 8.8857* 9.725 (7) 14.377 (7) 14.3772* 14.3772*				
	(b) 8.8857* 9.7260 14.3770 14.3772* 14.3772*				
	(c) 8.89 (0.0) 9.72 (0.7) 14.07 (22) 14.27 (0.0) 14.69 (22)				
	(d) 9.28 (44) 10.3 (5.0) 14.3 (0.0) 14.9 (0.0) 15.7 (9.2)				
60°	(a) 9.352 (22) 9.966 (23) 13.752 (8) 14.24 (12) 15.19 (15)				
	(c) 9.46 (1.2) 10.07 (1.0) 13.99 (1.7) 14.54 (2.0) 15.36 (1.7)				
	(d) 9.72 (4.0) 10.5 (5.3) 13.7 (0.0) 14.9 (4.4) 16.0 (5.0)				
	(b) 10.010 (19) 10.489 (17) 13.819 (17) 14.658 (20) 15.910 (23)				
45°	(c) 10.15 (0.0) 10.62 (1.2) 14.07 (1.0) 15.02 (2.0) 16.37 (2.9)				
	(d) 10.5 (3.7) 11.1 (5.0) 14.2 (2.7) 15.22 (4.5) 16.7 (6.0)				
	(a) 11.210 (15) 11.65 (15) 14.374 (14) 15.665 (13) 17.976 (17)				
	(b) 11.210 (15) 11.65 (15) 14.374 (14) 15.665 (13) 17.976 (17)				

注 (a) 本法 (b) 厳密解 (c) エネルギー法 (d) 実験値
 () の数値は本法に対する誤差(%)を示す。 表-1

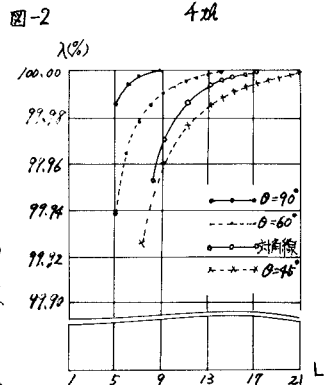
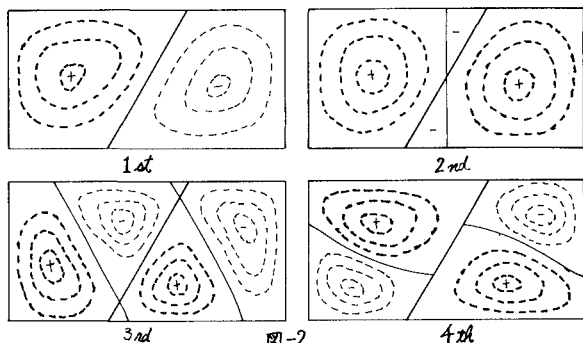


図-3

参考文献 1) 林川井: 連続板の振動について, 第15回構造強度に関する講演会講演集, 昭和48年, 2) 山崎 榎木・高橋: 応力法による一方向連続長方形板の自由振動, 九州大学工学集報, 第42巻, 第5号, 昭和44年10月, 3) 高橋 榎木: 周辺単純支持直交異方性無梁板構造の自由振動, 長崎大学工学部研究報告, 第2号, 昭和46年12月