

北海道工芸学部 正員 能野 紙雄

正員 角田 文雄

学生員 〇岸 徳光

1. まえがき 構造物の静力学的性状に関しては、慣用法は勿論、立体的解析も常識となっているが、動力学的性状においても、慣用は梁理論と平行して立体的な解析がこなわれている。本論文では、断面形状の変化が構造物の動的問題に及ぼす影響や、Time delay が問題となるような振動波の伝播の性状を明らかにするために、厳密な動的解析をこなそうとするものである。

つまり、Y.K. Cheung & M.S. Cheung⁽¹⁾ によつてなされた有限要素法的考えとはなれ、構造物と折板要素に分割し、その要素を面内変形と面外変形に分け、それぞれ2次元応力問題と平板の曲げ問題の振動方程式と誘導する。この方程式と有限なフーリエ変換⁽²⁾⁽³⁾を用いて厳密に解き、求められた諸式を座標変換マトリクスを介して、任意断面形状に適用するものである。解析例として、ある薄肉箱桁をヒドし、その代表的な固有値と固有モードを示す。

2. 折板要素の振動方程式 fig-1 に示すような折板要素を i, j に

あいて x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w とすると、振動時には、変位は調和振動であらわされるような時間関数をもつ故、角速度を ω としたとき変位 δ は $\delta = A \sin \omega t$ であるとする。

h は要素厚、 ρ は単位体積質量、

a. 面内変形に関する平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x \text{ 方向}) \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (y \text{ 方向}) \quad \cdots (2)$$

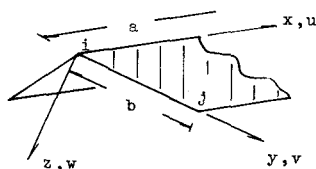


Fig. 1

弾性限度内を仮定し応力と歪の関係は Hooke's law に従うものとすれば、平面応力問題では、

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \cdots (3)$$

(3) を用い、(1) に $\cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$, (2) に $\sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$ の変換を施し部分積分をこなう。さらに、この2式についての変換式を連立に解いて $C_m S_n[U], S_m C_n[V]$ を求め逆変換をこなう。境界条件に留意して U, V を求めると、

$$U = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ Q_1(\eta) C_m[U_i] + Q_1(1-\eta) C_m[U_j] \right. \\ \left. + (1+\nu) \left(\frac{mb^2}{a} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ Q_1(\eta) - Q_2(\eta) \} C_m[U_i] + \{ Q_1(1-\eta) - Q_2(1-\eta) \} C_m[U_j] \right] \right. \\ \left. - \frac{1+\nu}{2G} \left(\frac{mb}{a} \right) \frac{b}{\pi} \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ Q_1(\eta) - Q_2(\eta) \} S_m[\sigma_{y,i}] + \{ Q_1(1-\eta) - Q_2(1-\eta) \} S_m[\sigma_{y,j}] \right] \right\} \quad \cdots (4)$$

$$V = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ \frac{mb}{a} \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_1(\eta) C_m[U_i] - \xi_1(1-\eta) C_m[U_j] \right] - \frac{b}{G} \frac{1}{\pi \lambda_1} \left[\xi_1(\eta) S_m[\sigma_{y,i}] - \xi_1(1-\eta) S_m[\sigma_{y,j}] \right] \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{mb}{a} \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\{ \lambda_1 \xi_1(\eta) - \lambda_2 \xi_2(\eta) \} C_m[U_i] - \{ \lambda_1 \xi_1(1-\eta) - \lambda_2 \xi_2(1-\eta) \} C_m[U_j] \right] \right\}$$

$$+ \frac{1+\nu}{2G} \left(\frac{b}{h}\right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left\{ \{ \lambda_1 \xi_1(\eta) - \lambda_2 \xi_2(\eta) \} S_m[\sigma_{yz}] - \{ \lambda_1 \xi_1(1-\eta) - \lambda_2 \xi_2(1-\eta) \} S_m[\sigma_{yz}] \right\} \dots (5)$$

但し $\eta = y/b$, $C_m[U] = \int_0^a U \cos \frac{m\pi}{a} x dx$, $S_m[\sigma_{yz}] = \int_0^a \sigma_{yz} \sin \frac{m\pi}{a} x dx$, $\lambda_1^2 = \left| \left(\frac{mb}{a} \right)^2 - \frac{12\nu^2}{G} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right|$

$Q(\eta) = \frac{ch\pi\lambda(2-\eta) - ch\pi\eta}{ch2\pi\lambda - 1}$, $\xi(\eta) = \frac{Sh\pi\lambda(2-\eta) + Sh\pi\eta}{ch2\pi\lambda - 1}$, $\lambda_2^2 = \left| \left(\frac{mb}{a} \right)^2 - \frac{12\nu^2}{G} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right|$

求められた変位を(3)に代入することにより、面内変形に対する断面力が求まる。

(b) 面外変形に関して、静的には、

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -D \Delta^2 w \dots (6)$$

また、 $R_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, $R_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$, $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, $M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$, $M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots (7)$
面内変形と同様に、L型の変換を施し部分積分をおこない整理すると、重調微分式に対するGreenの積分が導かれる。すなわち

$$D \int_0^a \int_0^b \{ (\Delta^2 w) L - (\Delta^2 L) w \} dx dy = R(w, L) \dots (8)$$

慣性力の入った平衡方程式は $D \Delta^2 w = q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $q=0$ とし(8)に代入し $L = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ とし、 $S_m S_n[W]$ を求め、逆変換をおこない境界条件を考慮すると W は

$$W = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ -\frac{1}{b} \left(\frac{b^2}{h^2} \right) \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_4^2} \left\{ \{ Q_3(\eta) - Q_4(\eta) \} S_m[M_{yz}] + \{ Q_3(1-\eta) - Q_4(1-\eta) \} S_m[M_{yz}] \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_4^2} \left\{ \{ \lambda_3^2 Q_3(\eta) - \lambda_4^2 Q_4(\eta) \} S_m[W_i] + \{ \lambda_3^2 Q_3(1-\eta) - \lambda_4^2 Q_4(1-\eta) \} S_m[W_i] \right\} \right. \\ \left. - \left(\frac{mb}{a} \right)^2 \frac{2-\nu}{\lambda_3^2 - \lambda_4^2} \left\{ \{ Q_3(\eta) - Q_4(\eta) \} S_m[W_i] + \{ Q_3(1-\eta) - Q_4(1-\eta) \} S_m[W_i] \right\} \right\} \dots (9)$$

但し $\lambda_3^2 = \left| \left(\frac{mb}{a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{h^2} \right) \left(\frac{12\nu^2}{G} \right) \right|$, $\lambda_4^2 = \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \left(\frac{b^2}{h^2} \right) \left(\frac{12\nu^2}{G} \right)$ であり、(7)に(9)を代入することにより断面力が求まる。

3. 固有値計算 面内、面外に関する断面力を変位であらわし、座標変換マトリクスを導入して後線における力のつりあいを考える。この操作を構造全体に適用すると $[K]\{\Delta\} = 0$ となり $\det[K] = 0$ より固有値が求まる。

4. 解析例 fig-2 に示すような両端単純支持の薄肉箱桁について、固有値と固有モードを求めた。fig-3 に半波長500cmの断面方向体次モードだけを示す固有値は比速度 C/C_0 で示す ($C_0 = \sqrt{G/\rho}$)

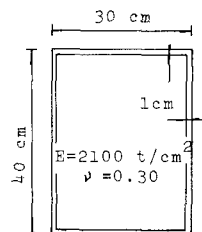
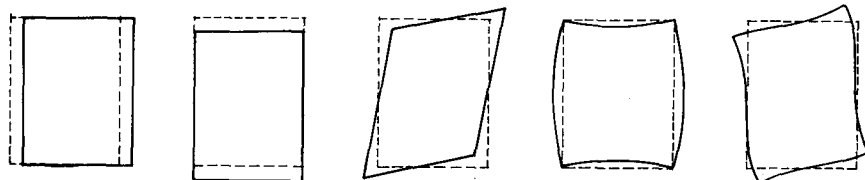


Fig. 2



0.1247
(0.1346)

0.1548
(0.1671)

0.3654

0.5960

0.8688

(0.8479) (): Beam Theory

Fig. 3

参考文献 1) Y. K. Cheung & M. S. Cheung, 'Free Vibration of Curved and Straight Beam-Slab or Box Girder Bridges', IABSE 1972

2) 能町 鉄雄 平板及び平面弾性問題に対する有効なフーリエ変換の応用

室蘭工大研究報告 昭31

3) 能町 鉄雄 弾性基礎にある四辺自由な矩形板の曲げについて

土木学会論文報告集 32号