I-230　多自由度解析法によるはりの非線形振動

長崎大学工学部　正員○高橋和雄
九州大学工学部　正員　樗木　武

1緒言　スパンが固定されるはりの振動問題においては振幅に依存する軸方向力が生ずるために，その運動方程式には非線形項が含まれることとなる。本題のはりの非線形振動に関しては，すでに多くの研究[1),2)]が報告されている。しかしながら，これらの研究は無限自由度系である連続体を一自由度系で近似できると仮定したものが多い。このため，仮定した座標あるいは時間関数の適切さいかんでは実際の振動状態を説明しているとは言いがたく，振幅に伴なう振動波形の変化[3)]，非線形特有の分数および高調波共振および内部共振[4)]などの解析など今後の研究にまつ問題は多い。一方，最近連続体を多自由度系として取り扱う解析方法が開始され，これらの諸現象が逐次解明されつつある。そこで，本研究ではGalerkin法を用いてはりを多自由度系として取り扱うことにより，自由および定常強制振動の数値解析を行ない，従来の方法の妥当性や精度を検討するとともに，非線形に伴なう諸現象を解析するものである。

2解法　細長比の大きいはりの低次振動を対象とすれば，回転慣性，せん断変形および有限変形の影響を無視することができ，本題の運動方程式[1)]が次のように与えられる．

$$L(y)=EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{EA}{2l}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-p\cos\Omega t=0 \qquad (1)$$

ここに，x：はりの軸方向に沿う座標，t；時間，y：はりのたわみ，l：スパン，E：弾性係数，I：断面2次モーメント，A：断面積，ρ：密度，p：外力の荷重強度，Ω：外力の円振動数

式(1)を解くために，はりのたわみyを次のように時間と空間との変数分離形に仮定する．

$$y=\sum_{i=1,3}^{\infty}X_i(x)\bar{T}_i(t) \qquad (2)$$　ここに，$X_i(x)$：座標関数，$\bar{T}_i(t)$：未知の時間関数

上式の$X_i(x)$としてのはりの線形曲げ振動の規準関数を用いるものとすれば，$X_i(x)$に関して次式が成り立つ．

$$\frac{d^4X_i}{dx^4}-\lambda_i^4X_i=0 \qquad (3)$$　ここに，$\lambda_i=\sqrt[4]{\rho A\omega_i^2/EI}\cdot l$（固有値）　ω_i：i次の固有円振動数

式(2)および式(3)を式(1)に代入のうえ無次元化すれば次のように書き改められる．

$$L(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ddot{T}_i+\frac{\lambda_i^4}{\lambda_1^4}T_i\right)X_i-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1^4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_kT_lT_m\int_0^1\left(\frac{dX_k}{d\xi}\frac{dX_l}{d\xi}\right)d\xi\,\frac{d^2X_m}{d\xi^2}-\frac{\bar{p}}{\lambda_1^4}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (4)$$

ここに，$\xi=x/l$，$T_i=\bar{T}_i/r$，$\bar{\omega}=\Omega/\omega_1$，$\tau=\omega_1 t$，$\bar{p}=pl^4/EIr$，$r$：断面2次半径

時間関数$T_i(t)$を求めるために，式(4)にGalerkin法を適用すると，各座標関数に関して次式をうる。

$$\int_0^1L(y)X_n\,d\xi=0 \qquad (5)$$　ここに，$n=1,3,\cdots\cdots$

はりの規準関数に関して直交性が成立することを考慮すれば，次のような時間に関するDuffing形の非線形連立微分方程式がえられる．

$$\ddot{T}_n+\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^4T_n+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mkln}T_kT_lT_m=\beta_n\bar{p}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (6)$$

ここに，$A_{mkln}=\frac{-1}{2\lambda_1^4}\int_0^1\left(\frac{dX_k}{d\xi}\frac{dX_l}{d\xi}\right)d\xi\cdot\int_0^1\frac{d^2X_m}{d\xi^2}X_n\,d\xi\Big/\int_0^1X_n^2\,d\xi$，　$\beta_n=\frac{1}{\lambda_1^4}\int_0^1X_n\,d\xi\Big/\int_0^1X_n^2\,d\xi$

外力がcosの形で与えられ，非線形項がすべて3次式であることから，式(6)の定常解を次のようにフーリエ級数の形に仮定することができる。

$$T_n=\sum_{g=1,3}^{\infty}b_g^n\cos g\bar{\omega}\tau \qquad (7)$$

式(7)を式(6)に代入して，cosの各項の係数を等しくおく方法(調和バランス法)を適用すれば，b_g^nに関する非線形連立代数方程式がえられる．これらを与えられた振動数比$\bar{\omega}$に対して適当な初期値のもとにNewton-Raphson法の繰り返し計算を用いて解けば，未知係数b_g^nが求められる．えられた結果を式(2)に代入すれば，はりの任意点における動的変位がえられ，各次の線形振動数に対応する主共振および3次，5次などの高調波共振現象を明らかにすることが

できる。また，式(6)の形の微分方程式には，外力の円振動数の3分の1の振動数をもつ振幅成分が卓越する3分の1次の分数調波共振が存在することが知られており，これを求めるために，T_mの解を式(7)にかえて次のように仮定して以下同様の演算をくり返せばよいことになる。

$$T_m=\sum_{g=1,3}^{\infty} b_{g/3}^{n}\cos\frac{g}{3}\bar{\omega}\tau \qquad (8)$$

	n	λ_n	α_n	β_n
(a)	1	π	1.0	$4/\pi^5$
	3	3π	9.0	$-4/3\pi^5$
	5	5π	25.0	$4/5\pi^4$
(b)	1	4.730041	1.0	$0.263608\ 10^{-2}$
	3	10.995608	$0.540392\ 10^{1}$	$-0.102177\ 10^{-2}$
	5	17.278760	$0.133443\ 10^{2}$	$0.654202\ 10^{-2}$

表-1

3計算例　両端ヒンジ(a)および固定(b)の2種類のはりについて，はりを3自由度系と仮定すれば次のような非線形連立微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_m+\alpha_m^2T_m+\alpha_{111}^nT_1^3+\alpha_{113}^nT_1^2T_3+\alpha_{115}^nT_1^2T_5+\alpha_{133}^nT_1T_3^2+\alpha_{135}^nT_1T_3T_5+\alpha_{155}^nT_1T_5^2+\alpha_{333}^nT_3^3+\alpha_{335}^nT_3^2T_5$$
$$+\alpha_{355}^nT_3T_5^2+\alpha_{555}^nT_5^3=\beta_m\bar{p}\cos\bar{\omega}\tau \qquad (9)$$

ここに，$\alpha_m,\alpha_{111}^n,\alpha_{113}^n,\cdots\cdots,\alpha_{555}^n,\beta_m$：境界条件によ，てきまる定数(表1,2参照)

	n	α_{111}^n	α_{113}^n	α_{115}^n	α_{133}^n	α_{135}^n	α_{155}^n	α_{333}^n	α_{335}^n	α_{355}^n	α_{555}^n
(a)	1	0.25	0.0	0.0	$0.225\ 10^{1}$	0.0	$0.625\ 10^{1}$	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	$0.225\ 10^{1}$	0.0	0.0	0.0	0.0	$0.2025\ 10^{2}$	0.0	$0.5625\ 10^{2}$	0.0
	5	0.0	0.0	$0.625\ 10^{1}$	0.0	0.0	0.0	0.0	$0.5625\ 10^{2}$	0.0	$0.15625\ 10^{3}$
(b)	1	$0.599410\ 10^{-1}$	$0.160658\ 10^{0}$	$-0.124971\ 10^{0}$	$0.710521\ 10^{0}$	$0.152034\ 10^{0}$	$0.167919\ 10^{1}$	$0.549303\ 10^{0}$	$-0.158[illegible]54\ 10^{0}$	$0.123938\ 10^{1}$	$-0.112674\ 10^{1}$
	3	$0.419729\ 10^{-1}$	$0.556885\ 10^{0}$	$0.595796\ 10^{-1}$	$0.129158\ 10^{1}$	$-0.248383\ 10^{0}$	$0.971388\ 10^{0}$	$0.494282\ 10^{1}$	$0.362858\ 10^{1}$	$0.136260\ 10^{2}$	$0.318949\ 10^{1}$
	5	$-0.330487\ 10^{-1}$	[illegible]	$0.133219\ 10^{1}$	$-0.125710\ 10^{0}$	$0.196653\ 10^{1}$	$-0.268171\ 10^{1}$	$0.122432\ 10^{1}$	$0.137926\ 10^{2}$	$0.968545\ 10^{1}$	$0.347908\ 10^{2}$

表-2

時間関数T_mについて，第5高調波までを採用すれば次のように表わされる。

$$T_m=b_1^n\cos\bar{\omega}\tau+b_3^n\cos3\bar{\omega}\tau+b_5^n\cos5\bar{\omega}\tau \qquad (10)$$

式(10)を式(9)に代入して，調和バランス法を適用すれば，次のような9元連立非線形代数方程式がえられる。

$$(\alpha_m^2-\bar{\omega}^2)b_1^n+\alpha_{111}^nf_{111}+\alpha_{113}^nf_{113}+\alpha_{115}^nf_{115}+\alpha_{133}^nf_{133}+\alpha_{135}^nf_{135}+\alpha_{155}^nf_{155}+\alpha_{333}^nf_{333}+\alpha_{335}^nf_{335}+\alpha_{355}^nf_{355}+\alpha_{555}^nf_{555}=\beta_m\bar{p}$$
$$(\alpha_m^2-9\bar{\omega}^2)b_3^n+\alpha_{111}^ng_{111}+\alpha_{113}^ng_{113}+\alpha_{115}^ng_{115}+\alpha_{133}^ng_{133}+\alpha_{135}^ng_{135}+\alpha_{155}^ng_{155}+\alpha_{333}^ng_{333}+\alpha_{335}^ng_{335}+\alpha_{355}^ng_{355}+\alpha_{555}^ng_{555}=0$$
$$(\alpha_m^2-25\bar{\omega}^2)b_5^n+\alpha_{111}^nh_{111}+\alpha_{113}^nh_{113}+\alpha_{115}^nh_{115}+\alpha_{133}^nh_{133}+\alpha_{135}^nh_{135}+\alpha_{155}^nh_{155}+\alpha_{333}^nh_{333}+\alpha_{335}^nh_{335}+\alpha_{355}^nh_{355}+\alpha_{555}^nh_{555}=0$$

ここに，$f_{ijk}=0.75b_1^1b_1^3b_1^5+0.25(b_1^1b_1^3b_3^5+b_1^1b_3^3b_1^5+b_3^1b_1^3b_1^5)+0.50(b_1^1b_3^3b_3^5+b_3^1b_1^3b_3^5+b_3^1b_3^3b_1^5)+0.25(b_3^1b_3^3b_5^5+b_3^1b_5^3b_3^5+b_5^1b_3^3b_3^5)$
$+0.50(b_1^1b_5^3b_5^5+b_5^1b_1^3b_5^5+b_5^1b_5^3b_1^5)+0.25(b_1^1b_3^3b_5^5+b_1^1b_5^3b_3^5+b_3^1b_1^3b_5^5+b_3^1b_5^3b_1^5+b_5^1b_1^3b_3^5+b_5^1b_3^3b_1^5)$，$g_{ijk}=0.25b_1^1b_1^3b_1^5+0.75b_3^1b_3^3b_3^5$
$+0.50(b_1^1b_1^3b_3^5+b_1^1b_3^3b_1^5+b_3^1b_1^3b_1^5)+0.25(b_1^1b_1^3b_5^5+b_1^1b_5^3b_1^5+b_5^1b_1^3b_1^5)+0.50(b_3^1b_5^3b_5^5+b_5^1b_3^3b_5^5+b_5^1b_5^3b_3^5)+0.25(b_1^1b_3^3b_5^5+b_1^1b_5^3b_3^5+$
$b_3^1b_1^3b_5^5+b_3^1b_5^3b_1^5+b_5^1b_1^3b_3^5+b_5^1b_3^3b_1^5)$，$h_{ijk}=0.75b_5^1b_5^3b_5^5+0.25(b_1^1b_1^3b_3^5+b_1^1b_3^3b_1^5+b_3^1b_1^3b_1^5)+0.50(b_1^1b_1^3b_5^5+b_1^1b_5^3b_1^5+b_5^1b_1^3b_1^5)$
$+0.25(b_1^1b_3^3b_3^5+b_3^1b_1^3b_3^5+b_3^1b_3^3b_1^5)+0.50(b_3^1b_3^3b_5^5+b_3^1b_5^3b_3^5+b_5^1b_3^3b_3^5)$，　$n=1,3,5$　(11)

外力$\bar{p}$が零である非線形自由振動について検討すると，式(8)から明らかなように，両端ヒンジの場合は各自由度間の連成が少なく，式(8)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_1+T_1+0.25(T_1^3+9T_1T_3^2+25T_1T_5^2)=0,\quad \ddot{T}_3+81T_3+2.25(T_1^2T_3+9T_3^3+25T_3T_5^2)=0,\quad \ddot{T}_5+625T_5+6.25(T_1^2T_5+9T_3^2T_5+25T_5^3)=0 \qquad (12)$$

上式の非線形項の性質から次のように各自由度の運動方程式に分離することが可能である。

$$\ddot{T}_1+T_1+0.25T_1^3=0,\quad \ddot{T}_3+81T_3+20.25T_3^3=0,\quad \ddot{T}_5+625T_5+15.625T_5^3=0 \qquad (13)$$

したがって，両端ヒンジばりの自由振動では1自由度系としての取り扱いが可能で，非線形振動時においても，線形振動と同じ正弦波形で振動することがわかる。両端固定の場合にはすべての自由度が連成するために，振幅の増大とともに他の自由度項が成長し，振動波形が連成することになり，多自由度系としての取り扱いが本質的である。両境界条件に関する非線形自由および強制振動の計算結果は講演時に発表する。

参考文献　1) D.Burgreen：Free Vibrations of a Pin-Ended Column With Constant Distance Between Pin Ends, JAM, Vol.17, 1950, pp.135～139, 2)佐藤：両端固定ばりおよび一端固定,他端単純支持ばりの非線形自由振動，日本機械学会論文集，第34巻，第259号，1968，pp.418～426，3)高橋,櫻木：はりの非線形振動に関する基本的考察，長崎大学工学部研究報告，第4号，1973，pp.97～105，4) J.A. Bennet & J.G.Eisley. A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations, AIAA J., Vol.8, 1970, pp.734～739