I-229　骨組構造物の非線形振動解析に関する二，三の考察

大阪大学工学部　正　員　前田幸雄
大阪大学工学部　正　員　林　正
大阪大学大学院　学生員　○前田研一

1. まえがき

有限要素法による非線形振動解析法として，従来より各種の計算法[1)~4)]が報告されている。本文では，これらの計算法を検討し，非線形項を"*additional pseudoloads*"として取扱う場合，および，増分計算に"*modified stiffness*"を適用する場合について，平面骨組構造物大変形問題に対応する新たな解式を誘導，提案する。そして，共通の計算上の諸問題を指摘しながら，簡単な数値計算例を用いて，それぞれの妥当性等を比較，検討する。

2. 運動方程式

非線形振動問題における運動方程式は *D'Alembert*の原理から，質量マトリクス $\mathbb{M}$ を用いて，

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}}(t)=\mathbb{F}(t)-\mathbb{R}(\mathbb{X}(t)) \tag{1}$$

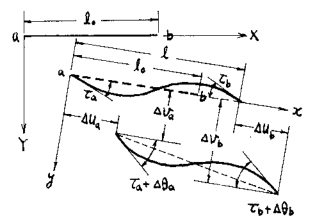
で与えられる。左辺，右辺第一項，および，第二項がそれぞれ，慣性力，強制力，内部抵抗力を表わす。上式は内部抵抗力 $\mathbb{R}$ の性質から，非線形の二階連立常微分方程式となる。これを解くことは比較的容易であるが，計算量，時間の点で実用的ではなく，何らかの数値解析上の処理が不可欠である。

3. 応力マトリクスと割線剛性マトリクス

「応力マトリクス」と「割線剛性マトリクス」をまず，誘導する。

初期部材端荷重 $\mathbb{P}$，それによる初期歪との状態にある一平面骨組部材が荷重増分 $\Delta\mathbb{P}$ によって，さらに，歪増分 $\Delta\varepsilon$ を生じる場合を考える。今，

$$\varepsilon=u_x+\frac{1}{2}v_x^2-yv_{xx}\ ,\ \Delta\varepsilon=\Delta u_x+v_x\Delta v_x+\frac{1}{2}\Delta v_x^2-y\Delta v_{xx} \qquad (2)_{1,2}$$



図－1

なる式で，ε，$\Delta\varepsilon$ が与えられるとすると，歪エネルギー増分 ΔU は

$$\Delta U=E\int\left(\varepsilon\Delta\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^2\right)dV=E\int\left[\left\{\frac{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial u_x}\Delta u_x+\frac{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial v_x}\Delta v_x+\frac{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial v_{xx}}\Delta v_{xx}\right\}\right. \tag{3}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial u_x^2}\Delta u_x^2+\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial v_x^2}\Delta v_x^2+\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial v_{xx}^2}\Delta v_{xx}^2+2\frac{\partial^2(\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\partial u_x\partial v_x}\Delta u_x\Delta v_x\right\}+\frac{1}{2}\left(\Delta u_x\Delta v_x^2+\frac{1}{4}\Delta v_x^4\right)+\frac{1}{2}v_x\Delta v_x^3\right]dV$$

である。次に，変位関数は，図－1の記号を用いて，次式

$$u=\frac{x}{l_0}(l-l_0)\qquad ,\ v=\left(x-\frac{2x^2}{l_0}+\frac{x^3}{l_0^2}\right)\tau_a+\left(-\frac{x^2}{l_0}+\frac{x^3}{l_0^2}\right)\tau_b \qquad (4)_{1,2}$$

$$\Delta u=\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\Delta u_a+\frac{x}{l_0}\Delta u_b\ ,\ \Delta v=\left(1-\frac{3x^2}{l_0^2}+\frac{2x^3}{l_0^3}\right)\Delta v_a+\left(x-\frac{2x^2}{l_0}+\frac{x^3}{l_0^2}\right)\Delta\theta_a$$

$$+\left(\frac{3x^2}{l_0^2}-\frac{2x^3}{l_0^3}\right)\Delta v_b+\left(-\frac{x^2}{l_0}+\frac{x^3}{l_0^2}\right)\Delta\theta_b \qquad (5)_{1,2}$$

を採用する。従って，(2)式に代入して，仮想仕事の原理を適用すると，増分後の荷重－変位関係式が得られる。

$$\mathbb{P}+\Delta\mathbb{P}=\{\mathbb{k}_0+\mathbb{k}_1(\mathbb{u})+\mathbb{k}_2(\mathbb{u}^2)\}\mathbb{u}+\left[\{\mathbb{k}_0+2\mathbb{k}_1(\mathbb{u})+3\mathbb{k}_2(\mathbb{u}^2)\}+\{\mathbb{k}_1(\Delta\mathbb{u})+\mathbb{k}_2(\Delta\mathbb{u}^2)\}+\mathbb{k}_{11}(\mathbb{u},\Delta\mathbb{u})\right]\Delta\mathbb{u}$$

$$=\mathbb{k}(\mathbb{u})\mathbb{u}+\widetilde{\mathbb{k}}(\mathbb{u},\Delta\mathbb{u})\Delta\mathbb{u} \tag{6}$$

ここに，$\mathbb{u}$は（0，0，τ_a，$l-l_0$，0，τ_b），$\Delta\mathbb{u}$は（Δu_a，Δv_a，$\Delta\theta_a$，Δu_b，Δv_b，$\Delta\theta_b$）なるベクトルである。上式の右辺第一項は (3)～(5)式から，明らかに，$\mathbb{P}$と全く一致する量であることが解る。そこで，$\mathbb{k}(\mathbb{u})$を「応力マトリクス」と呼ぶことにする。ただし，$\mathbb{u}$は各部材特有の量であり，「応力マトリクス」を全体構造系で組立てることはできない。すなわち，増分前の全体構造系の初期内部抵抗力 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{k}(\mathbb{u})$を用いて，次式で与えられる。

$$\mathbb{R}(\mathbb{X})=\sum_{Y}\mathbb{C}(\mathbb{X})\cdot\mathbb{k}(\mathbb{u}(\mathbb{X}))\cdot\mathbb{u}(\mathbb{X}) \tag{7}$$

ここに，$\mathbb{X}$，$\mathbb{C}$は基準座標系に対するトータル変位，座標変換マトリクスであり，$\sum_{Y}$は全部材に関する合計を意味する。一方，(6)式の右辺第二項の$\widetilde{\mathbb{k}}(\mathbb{u},\Delta\mathbb{u})$は $\Delta\mathbb{P}$ と $\Delta\mathbb{u}$ を結びつけるものであり，これは「割線剛性マト

リクス」と呼ぶことにする。$\widetilde{\mathbb{K}}$は未知量 Δu を含んでいるが，Δu を略すと，「接線剛性マトリクス」となることは(3)～(5)式から，容易に確かめられる。「割線」という表現を用いたのは，「接線」との区別を明確にするためなのである。Δu は各部材間の連続条件を満たす量であり，全体構造系で，荷重増分 $\Delta\mathbb{F}$，変位増分 $\Delta\mathbb{X}$ を用いて，

$$\Delta\mathbb{F}=\sum_{r}\mathbb{C}(\mathbb{X})\cdot\mathbb{k}(u(\mathbb{X}),\mathbb{C}^{T}(\mathbb{X})\cdot\Delta\mathbb{X})\cdot\mathbb{C}^{T}(\mathbb{X})\cdot\mathbb{X}=\widetilde{\mathbb{K}}(\mathbb{X},\Delta\mathbb{X})\cdot\Delta\mathbb{X} \tag{8}$$

なる増分問題に対する荷重－変位関係式が導かれる。この式の $\widetilde{\mathbb{K}}(\mathbb{X},\Delta\mathbb{X})$ が全体構造系での「割線剛性マトリクス」である。上式は $\Delta\mathbb{X}$ による部材回転量が余程大きくない限り，まず十分な精度が期待できると思われる。

4. 運動方程式の線形化

(1)式で与えられた非線形の運動方程式を線形化することを考える。従来より，各種の方法が示されているが，ここでは，3.の結果を用いて，特に，非線形項を"*additional pseudoloads*"として処理する方法，および，増分計算に"*modified stiffness*"を適用する方法について述べる。これらの方法を数式で簡単に表現すると，

[1] *Additional Pseudoloads Method* (A. P. M.)

$$\mathbb{M}\cdot\Delta\ddot{\mathbb{X}}_{D_{n+1}}+\widetilde{\mathbb{K}}(\mathbb{X}_{s},\Delta\mathbb{X}=0)\cdot\Delta\mathbb{X}_{D_{n+1}}=\Delta\mathbb{F}_{D_{n+1}}-\mathbb{N}^{*}_{n+1}+\mathbb{R}e_{n+1} \tag{9}$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbb{N}^{*}_{n+1}&=\mathbb{N}_{n}\\&=2\mathbb{N}_{n}-\mathbb{N}_{n-1}\\&=3\mathbb{N}_{n}-2\mathbb{N}_{n-1}+\mathbb{N}_{n-2}\\&=3\mathbb{N}_{n}-4\mathbb{N}_{n-1}+3\mathbb{N}_{n-2}-\mathbb{N}_{n-3}\end{aligned}\qquad \mathbb{N}_{n}=\mathbb{R}(\mathbb{X}_{s}+\mathbb{X}_{D_n})-\mathbb{R}(\mathbb{X}_{s}+\mathbb{X}_{D_{n-1}})-\widetilde{\mathbb{K}}(\mathbb{X}_{s},\Delta\mathbb{X}=0)\cdot\Delta\mathbb{X}_{D_n}$$

[2] *Modified Stiffness Method* (M.S.M.)

$$\mathbb{M}\cdot\Delta\ddot{\mathbb{X}}_{D_{n+1}}+\widetilde{\mathbb{K}}((\mathbb{X}_{s}+\mathbb{X}_{D_n}),\Delta\mathbb{X}^{*}_{D_{n+1}})\cdot\Delta\mathbb{X}_{D_{n+1}}=\Delta\mathbb{F}_{D_{n+1}}+\mathbb{R}e_{n+1} \tag{10}$$

ここに，

$$\Delta\mathbb{X}^{*}_{D_{n+1}}=\Delta\mathbb{X}_{D_n},\ =2\Delta\mathbb{X}_{D_n}-\Delta\mathbb{X}_{D_{n-1}},\ =3\Delta\mathbb{X}_{D_n}-2\Delta\mathbb{X}_{D_{n-1}}+\Delta\mathbb{X}_{D_{n-2}},\ =3\Delta\mathbb{X}_{D_n}-4\Delta\mathbb{X}_{D_{n-1}}+3\Delta\mathbb{X}_{D_{n-2}}-\Delta\mathbb{X}_{D_{n-3}}$$

$$\mathbb{R}e_{n+1}=(\mathbb{F}_{s}+\mathbb{F}_{D_n})-\mathbb{M}\cdot\ddot{\mathbb{X}}_{D_n}-\mathbb{R}(\mathbb{X}_{s}+\mathbb{X}_{D_n})$$

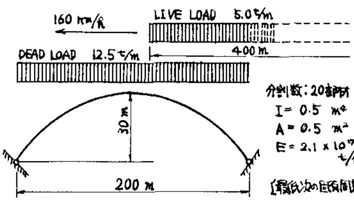
のようになる。添字 n，および，s, d は それぞれ，増分 *step* 回数，静的，動的問題に対する値を意味する。[1]の方法は 明らかに，*Modal Analysis* を適用することが可能であり，[2]の方法に比して，精度の点では劣るが，問題の種類によっては，非常に合理的な方法であるといえる。なお，この方法は 本来，増分表示する必要はないが，補正力項 $\mathbb{R}e$ を導入するために，このようにしたのである。

5. 線形常微分方程式の数値解法

常微分方程式の数値解法も各種の方法が報告されているが，精度の点はもちろん，それらが 各々の特徴的な振動性状にも，そのパラメーターによって，対処し得るといった理由等から，*Newmark* の β 法，および *Wilson* の θ 法がよく用いられている。一方，これらの方法を適用する場合の問題点として，反復収束法を用いるか，あるいは，静的問題の型に変形して，掃出法を用いるかの選択があるが，両者の演算回数を比較すると，反復回数が 剛性マトリクスの帯幅数の $\frac{1}{4}$ 以下で前者が収束しない限り，後者の方が有利であることが解る。ただし，反復収束法は 全体構造系で剛性マトリクスを組む必要がなく，自由度の非常に多い問題には有効である。

6. 数値計算例

数値計算例の一部として，図－2に示す2ヒンジ放物線アーチに，走行活荷重が作用する場合の非線形動的応答の各計算法による結果を表－1に示す。



図－2

表－1

Newmarkのβ法

$\beta=\frac{1}{4}$, $\Delta h=0.03$ sec

計算法	最大応答 (m)
LINEAR	0.786
A.P.M.	0.996
M.S.M.	1.184
EXACT	1.185

7. おすび

以上のことから，本文に提案した方法が十分に実用性のあるものであることが予測される。なお，計算には NEAC 2200-700 (大阪大学大型計算機センター)を使用した。

1) Stricklin J.A. et al.,:Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method, AIAA.J.Vol.9 No.4 (1971) 2) Clough R.H.,:Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, JAP.-U.S.Semi. on Matrix Methods of Structural Analysis and Design (1969) 3) Wilson E.L. et al.,:Non-linear Dynamic Analysis of Complex Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol.1 (1973) 4) Argyris J.H. et al.,: Nonlinear Oscillations using the Finite Element Technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2.No.1 (1973)