

山口大学 学生員 〇窪田 彰

山口大学 正員 會田忠義

1. まえがき

柱あるいは骨組構造物が周期性外力を受け、周期性外力と非周期性外力との比が一定の場合、パラメトリック励起振動となる。本研究は、変形法を用いて減衰力が作用する場合の動的弾性安定性の検討を試みたものである。ここでは、下に示す減衰マトリックスは固有ベクトルを用いて対角化される特別な場合を想定した。解析理論は線形化された有限変形法を用いる。この解析にあたり、次の仮定を入れた。

- ①外力はすべて構造物の節点に作用する。 ②周期性外力はすべて一定周期をもつ。 ③周期性外力はすべて一定の割合で漸増する。 ④外力は質量をもたない。 ⑤骨組については骨組構造物一般の仮定が成立する。 ⑥内力はすべて弾性限内にある。 ⑦局部座屈は生じないとする。 ⑧構造物の質量はすべて節点に集中する。

2. 運動方程式

微小変形時の運動方程式は図-1のA点以下では成立するか、A点以上となると成立しなくなる。しかし、このような非線形挙動を呈する構造物でも微小変位のつりあい状態を基準として、あらたな付加荷重とそれにより生じた付加変形との関係は、付加変位が小さい場合には、実用上十分な精度で、線形関係を満足する。今、節点*i*に作用する非周期性外力ベクトルを $\bar{P}_i$ 、周期性外力ベクトルを $\bar{P}_{\sin \omega t}$ とする。ここで、 ω は構造物の固有振動数から十分に離れた値をもつ円振動数である。

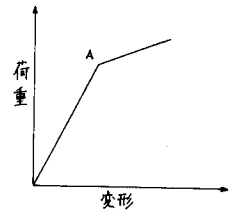


FIG 1

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= \{X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}, M_{x0i}, M_{y0i}, M_{z0i}\}^T \\ \bar{P}_i &= \{\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i, \bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{zi}\}^T \end{aligned} \quad (1)$$

節点変位ベクトルを $\bar{d}_i$ とすると、 $\bar{d}_i$ は非周期性外力による変位ベクトル $\bar{d}_{0i}$ と周期性外力による変位ベクトル $\bar{d}_i$ との和となる

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \\ \bar{d}_{0i} &= \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \\ \bar{d}_i &= \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

又、構造物の節点座標を f とすると、次のようになる。

$$f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad (3)$$

i, j 部材の*i*端における部材座標軸方向の材端ベクトルを N_{ij} 、部材変位ベクトルを $\bar{d}_i$ とすると、

$$N_{ij} = \{\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\}^T, \quad \bar{d}_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \quad (4)$$

$$N_{ij} = S_{ij} \bar{d}_i + S_{ji} \bar{d}_j \quad S_{ij}, S_{ji} \text{ は剛性マトリックス}$$

となる。(したがって、付加変位を $\Delta \bar{d}_i$ とすると、運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} W_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) + C_i \frac{d}{dt} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} (f + \Delta f, f_j + \Delta f_j, d_{ij} + \Delta d_{ij}) \times N_{ij} (d_{0i} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, \\ d_{0j} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_j, f_j, d_{ij}) = \bar{P}_{0i} + \bar{P}_{\sin \omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 W_i は節点*i*の集中質量を m_i 、 x 軸まわり、 y 軸まわり、 z 軸まわりの質量慣性モーメントをそれぞれ I_{xx} 、 I_{yy} 、 I_{zz} とした時、対角行列となる。 π_{ij} は変換行列である。上式の右3項の π_{ij} 、 N_{ij} を展開し、 $\Delta \bar{d}_i$ の2次以上の項を無視し、 $\Delta \bar{d}_i$ をあらたに $\bar{d}_i$ とあくと次のようになる。

$$W_{ij} \frac{d^2}{dx^2} d_i + C \frac{d}{dx} d_i + \sum_{j=1}^n (\pi_{ij} S_{ij} \pi_{ij}^{-1} d_i + \pi_{ij} S_{ij} \pi_{ij}^{-1} d_j) + \sum_{j=1}^n (H_{ij} (N_{ij} + \bar{N}_{ij}) d_i + H_{ij} (N_{ij} + \bar{N}_{ij}) d_j) = 0 \quad (6)$$

N_{ij} は非周期性外力 P_0 が作用するときの部材 ij の i 端の材端バクトルであり、 $\bar{N}_{ij}$ は周期性外力 $\bar{P}_i \sin \omega t$ が作用するときの i 端の材端力バクトルである。 P_0 と $\bar{P}_i$ は一定の比をもつので、単位荷重 $\bar{P}_i$ を考える。又、 $\bar{P}_i$ によって生ずる部材 ij の i 端の材端力バクトルを $\bar{N}_{ij}'$ とすると、 P_0 、 $\bar{P}_i$ 、 N_{ij} 、 $\bar{N}_{ij}$ は次のようになる。

$$P_0 = P_0 \bar{P}_i, \bar{P}_i = \bar{P}_i \bar{P}_i, N_{ij} = P_0 \bar{N}_{ij}, \bar{N}_{ij} = \bar{P}_i \bar{N}_{ij} \sin \omega t \quad (7)$$

$$\text{ゆえに, } N_{ij} + \bar{N}_{ij} = (P_0 + \bar{P}_i \sin \omega t) \bar{N}_{ij}$$

(したがって、有限振幅時の運動方程式は次のようになる。)

$$W_{ij} \frac{d^2}{dx^2} d_i + C_{ij} \frac{d}{dx} d_i + \sum_{j=1}^n (\pi_{ij} S_{ij} \pi_{ij}^{-1} d_i + \pi_{ij} S_{ij} \pi_{ij}^{-1} d_j) + (P_0 + \bar{P}_i \sin \omega t) \sum_{j=1}^n (H_{ij} \bar{N}_{ij} d_i + H_{ij} \bar{N}_{ij} d_j) = 0 \quad (8)$$

以上を各節点に適用し、一連の運動方程式をマトリックス表示すると、次式で表わされる。

$$W \frac{d^2}{dx^2} d + C \frac{d}{dx} d + K_1 d + (P_0 + \bar{P}_i \sin \omega t) K_2 d = 0 \quad (9)$$

ここで、 d は有限変位を表わすバクトル、 W は質量及び質量モーメントを表わす対角行列、 C は減衰定数及び固有バクトルから求めた減衰行列、 K_1 は剛性行列、 K_2 は単位荷重の部材応力を含む行列

3. 境界振動数方程式

上式において、変位の一次微分項を省いて整理すると、マシュー・ヒル方程式となる。この解のうちで外力の周期と同じ周期をもつ解と2倍の周期をもつ解により、解の安定領域と不安定領域を^{**)}区別することは周知^{*)}の通りである。ところが、一次微分項を考慮した時も、減衰行列が対角化され得る場合、マシュー・ヒル方程式と同じ手順により解析される。変位バクトルと周期性外力の周期の2倍の周期をもつ次の周期関数で表わし

$$d = \alpha \sin \frac{1}{2} \omega t + \beta \cos \frac{1}{2} \omega t \quad (10)$$

(10) 式を(9)式に代入して、整理すると、非動的な不安定領域の限界値は、(9)式の固有値問題として与えられる。

$$\left[\begin{array}{cc} K_1 - \omega^2 W/4 & P K_2/2 - \omega C/2 \\ P K_2/2 + \omega C/2 & K_1 - \omega^2 W/4 \end{array} \right] + P_0 \left[\begin{array}{cc} K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{array} \right] = 0 \quad (11)$$

又、変位バクトルと周期性外力と同周期であるとするとき、

$$d = \frac{1}{2} P_0 + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad (12)$$

これより、 ω は不安定領域の限界値は、(9)式の固有値問題として与えられる。

$$\left[\begin{array}{ccc} K_1 - \omega^2 W & 0 & \omega C \\ 0 & K_1 & P K_2 \\ -\omega C & P K_2/2 & K_1 - \omega^2 W \end{array} \right] + P_0 \left[\begin{array}{ccc} K_2 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{array} \right] = 0 \quad (13)$$

4. 適用例

簡単な例として、両端にシジ柱(図-3)に本解析法を適用し、結果と示めすと図-4のとおりである。その他の構造物については議事会当日発表の予定である。また、骨組構造物の動的安定に及ぼす強制振動の影響については、後日別の機会に発表の予定である。

* 倉田・佐伯 骨組構造物の動的安定について 第28回年次学術講演会概要集

** ボローチン 弾性系の動的安定

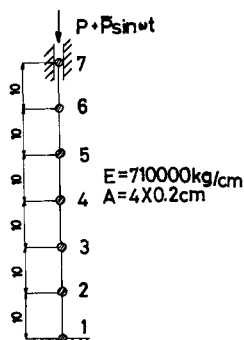


FIG 3

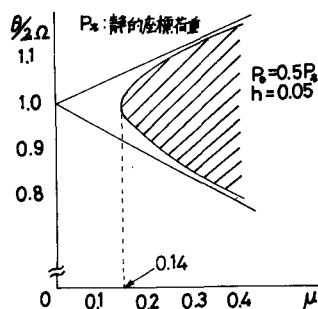


FIG 4