I-202　吊橋の空力弾性振動の数値解析

東京大学工学部　正　員　伊藤　学
〃　　　〃　　宮田利雄
〃　　　学生員○久保喜延

まえがき

構造物の耐風安定性を検証する手法に風洞実験がある。そのモデル化には二つの手法、即ち、i）構造物の部分模型（二次元系構造物）による挙動から、構造物全体の挙動を論ずることができるとする部分模型実験と、ii）構造物全体の模型（三次元系構造物）によって、挙動を観察する全体模型実験とがある。従来、この二つの手法による相互の比較および相関性についてあまり検討されたことはない。その理由として、次の二点をあげることができると考えられる。i）空気力の線形性を仮定すれば、三次元系の振動方程式は、二次元系の振動方程式に帰着されるため、それ程研究の必要性がなかった。ii）現象の確認には、大型風洞が必要である。そこで、我々は、strip theory にもとづいた吊橋の多自由度振動方程式の外力項に、測定された非定常空気力を導入し、規準振動形法による解析を行って、応答を追跡した。この手法を通じて、上述した二次元系構造物の応答と三次元系構造物の応答との相関性を数値解析および実験によって検討し、更に、strip theory の適用範囲について考察することにした。以下、用いられる仮定および解析法について述べる。

振動方程式の記述および解

この手法には、次の仮定が含まれる。i）振動は、緩慢であり1周期の間は線形に応答する。ii）応答は、周期前の状態を初期条件として持続する。iii）各振動（たわみ振動あるいは捩り振動）自体の振動形間の連成は存在しない。iv）空気力は、節点のみに作用する。振動方程式は、外力項の空気力が振幅に対して非線形であるために、自律系の非線形振動方程式となる。この解を求めることは、空気力の関数表示が困難であることもあって、解析的に求めることは不可能に近い。そこで、仮定 ii）を導入し、逐次応答をもとめ、定常解を得る。以上の観点に立って、たわみ振動および捩り振動の連成系について運動方程式を記述する。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \text{-----(1)}$$

但し、M_1, M_2：質量マトリクス．C_1, C_2：構造減衰マトリクス．K_1, K_2：剛性マトリクス

δ_1, δ_2：変位ベクトル（たわみ変位および捩り変位）．f_{ij}, g_{ij}：空気力マトリクス（それぞれ、変位速度成分および変位成分．換算風速、変位の関数）　・：時間微分

(1) 式は自励系の方程式であるから、右辺を左辺に移すと

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{--------(1')}$$

但し、$F_{11} = C_1 - f_{11}$,　$F_{12} = -f_{12}$,　$F_{21} = -f_{21}$, $F_{22} = C_2 - f_{22}$,

$G_{11} = K_1 - g_{11}$,　$G_{12} = -g_{12}$,　$G_{21} = -g_{21}$, $G_{22} = K_2 - g_{22}$

(1') 式から、$F_{ij}=0$, $G_{12}=0$, $G_{21}=0$ として、規準関数 $[U_1]$, $[U_2]$ をもとめ、$\delta = [U]\varphi$ なる座標変換を行ない、(1') の第1式、第2式にそれぞれ、左から $[U_1]^T$, $[U_2]^T$ を乗じ、振動形の正規化を行なう。その中でそれぞれ、m番目，n番目の振動形に着目すると、次の (2) 式になる。

$$\ddot{\varphi}_{1m} + 2\zeta_{11m}\,\omega_{1m}\,\dot{\varphi}_{1m} + \omega_{1m}^2\,\varphi_{1m} + \frac{1}{m_{1m}^{*}}\left[\left(\sum_{k=1}^{l} U_{1km} F_{12kk} U_{2kn}\right)\dot{\varphi}_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{l} U_{1km} G_{12kk} U_{2kn}\right)\varphi_{2n}\right] = 0$$

$$\ddot{\varphi}_{2n} + 2\zeta_{22n}\omega_{2n}\dot{\varphi}_{2n} + \omega_{2n}^2\varphi_{2n} + \frac{1}{m_{2n}^*}\left[\left(\sum_{k=1}^{\ell} U_{2kn}F_{21kk}U_{1km}\right)\dot{\varphi}_{1m} + \left(\sum_{k=1}^{\ell} U_{2k\ell}G_{21kk}U_{1km}\right)\varphi_{1m}\right] = 0 \quad \text{-------- (2)}$$

但し、ζ：各振動形での減衰定数，　ω：各振動形での振動数．　m^*：対角化された質量マトリクスの成分

各指数，m, n, k は、成分を表わす

(2)式における連成次数 m, n の決定は、最も連成度の高い組み合わせを選ぶことにする。即ち、$\dot{\varphi}_{ij}$ の係数が最大となるような m, n とする。種々の振動形に対して (m, n) の組み合わせが決定されるから、それに対応した φ_{ij} を決定すれば、ℓ が決定される。そのためには、連成方程式を　を解く必要がある。従来、(2)の解法には、U－g 法という図式解法が適用されたが、解析的な解は与えられていなかった。以下は、(2)式の解法について述べる。(2)式の代わりに次の(2')式を用いても一般性を欠くことはないので、(2')式で議論を進める。

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2a_{11}\dot{\varphi}_1 + b_{11}\varphi_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2 + a_{21}\varphi_2 &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + 2a_{22}\dot{\varphi}_2 + b_{22}\varphi_2 + a_{21}\dot{\varphi}_1 + b_{21}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{----------- (2')}$$

ここで、$\varphi_1 = \varphi_{10}e^{\lambda t}$，$\varphi_2 = \varphi_{20}e^{\lambda t}$ とおき、$\varphi_{10}, \varphi_{20}$ が自明でない解を得るは、(3)式となる。

$$\lambda^4 + 2(a_{11}+a_{22})\lambda^3 + (4a_{11}a_{22}+b_{11}+b_{22}-a_{12}a_{21})\lambda^2 + (2b_{11}a_{22}+2a_{11}b_{22}-b_{12}a_{21}-b_{21}a_{12})\lambda + b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21} = 0 \quad \text{-- (3)}$$

(3)を解くために次の変換を

$$z = \lambda + \frac{a_{11}+a_{22}}{2}, \quad d_1^2 = b_{11} - a_{11}^2, \quad d_2^2 = b_{22} - a_{22}^2$$

を行なうと (3)式は、次のようになる．　$z^4 + az^2 + bz + c = 0$　---------- (4)

但し、$a = d_1^2 + d_2^2 - \frac{(a_{11}-a_{22})^2}{2} - a_{12}a_{21}$，　$b = -(a_{11}-a_{22})(d_1^2-d_2^2) + (a_{11}+a_{22})a_{12}a_{21} - b_{12}a_{21} - b_{21}a_{12}$

$$c = \frac{1}{16}(a_{11}-a_{22})^4 + \frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2(d_1^2+d_2^2) - a_{11}a_{22}(d_1^2+d_2^2) + d_1^2d_2^2 - a_{12}a_{21}\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 + (b_{12}a_{21}+b_{21}a_{12})\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right) - b_{12}b_{21}$$

四次方程式の根は、2組の互いに共役な複素根で構成されるから(4)式が、次のように因数分解されるとする。

$$(z^2 + \alpha z + \beta_1)(z^2 - \alpha z + \beta_2) = 0 \qquad \text{(但し、}\alpha, \beta_1, \beta_2\text{は、実数)} \quad \text{------- (5)}$$

(4)と(5)を係数比較すると、$-\alpha^2 + (\beta_1+\beta_2) = a$，　$\alpha(\beta_2-\beta_1) = b$，　$\beta_1\beta_2 = c$　------- (6)

となる。これから α を消去する。

$$(\beta_1+\beta_2)^3 - a(\beta_1+\beta_2)^2 - 4c(\beta_1+\beta_2) + 4ac - b^2 = 0, \quad \beta_1\beta_2 = c \quad \text{------ (7)}$$

物理的条件より、$a > 0$，(6)式の第1式から $\beta_1+\beta_2 > a$ である。一方、(7)式の第1式を $f(\beta_1+\beta_2)$ とおけば、$f(a) = -b^2 < 0$ となり、$\beta_1+\beta_2$ が、三次方程式(7)の $\beta_1+\beta_2 > a$ なる実根として常に存在する。(7)の第1式の根は、Cardano の方法によって求められ、β_1, β_2 が決定される。以上の手法によって、得られた(2')の根は、

$$\lambda_{1,2} = -\zeta_1\omega_1 \pm i\omega_1, \quad \zeta_1 = \frac{\alpha + a_{11} + a_{22}}{2\sqrt{4\beta_1 - \alpha^2}}, \quad \omega_1^2 = 4\beta_1 - \alpha^2$$

$$\lambda_{3,4} = -\zeta_2\omega_2 \pm i\omega_2, \quad \zeta_2 = \frac{-(\alpha - a_{11} - a_{22})}{2\sqrt{4\beta_2 - \alpha^2}}, \quad \omega_2^2 = 4\beta_2 - \alpha^2$$

となる。これらを用いて、φ_1, φ_2 を求める．

$$\varphi_1 = e^{-\zeta_1\omega_1 t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + e^{-\zeta_2\omega_2 t}(C_3\cos\omega_2 t + C_4\sin\omega_2 t)$$

$$\varphi_2 = e^{-\zeta_1\omega_1 t}\alpha_1(C_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) + C_2\sin(\omega_1 t+\theta_1)) + e^{-\zeta_2\omega_2 t}\alpha_2(C_3\cos(\omega_2 t+\theta_2) + C_4\sin(\omega_2 t+\theta_2))$$

こうして求められた $\varphi_{1m}, \varphi_{2n}$ の線形結合によって、(1)式の応答を論ずることができる．更に定常振動の存在および、その安定性について議論する必要がある。

あとがき

この手法によって、連成多自由度振動系について、上述の二次元系および三次元系構造物の応答比較の他に、風速の時間変化と応答の時間変化との関係、吊橋のガスト応答等、応答の時間的変化を扱かう問題に適用できると考えられる。紙面の都合上、実験結果および解析結果にまで言及できなかった。これらについては、当日報告する。最後に、実験について多大の御援助をして下さった東京大学橋梁研究室の小栗英和助手、大竹宏治技官に感謝の意を表する。