I-198　薄肉曲線桁の剛性マトリックス

秋田大学　正員　○薄木征三
佐藤工業　正員　東御幹生
秋田大学　正員　稼農知徳

1. まえがき　薄肉直線桁の剛性マトリックスは，すでに多くの研究者によって導びかれている。これらには単純ねじりのみならず，曲げねじりをも考慮したものもあり，また微小変位理論のみならず，大変形をも考慮したものも発表されている。しかしながら薄肉曲線桁に関しては微小変位理論に基づくものでも，曲げねじれを考慮したものは極めてすくない。しかも従来のもの[1]は，剛性マトリックスの誘導に薄肉曲線桁に関する微分方程式の解を基本にしている点で正確なものであるけれども，双曲線関数を含む複雑な表示となっており，変断面曲線桁等には適用が難しい。ここでは，たわみとねじれ角をべき級数で近似し，曲げねじれを考慮した平明かつ十分に精度のよい剛性マトリックスを与え応用する。

2. 剛性マトリックスの誘導　図-1と2に示すような座標系を考える。図-2で，Oは図心点，Sはせん断中心，Dは任意点である。またsは薄肉中心線に沿う線座標である。以下ではせん断中心軸に関する変形を考えることにする。荷重は曲率面外のもののみとし，曲率面内の変形を考慮しないものとすると，節点iでの自由度は，たわみu_i，たわみ角ϕ_{yi}，ねじれ角φ_i，ねじれ率ψ_iであり，対応する等価節点力は，せん断力Q_i，曲げモーメントM_{yi}，ねじりモーメントT_i，曲げねじりモーメント$T_{\omega i}$である。j点についても同様である。剛性マトリックスの誘導の要点は以下のようである。

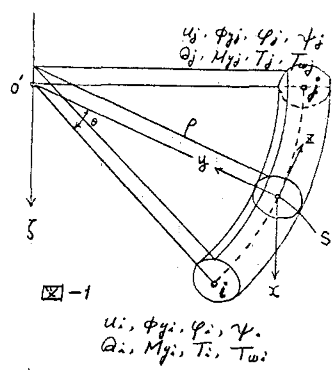


図-1

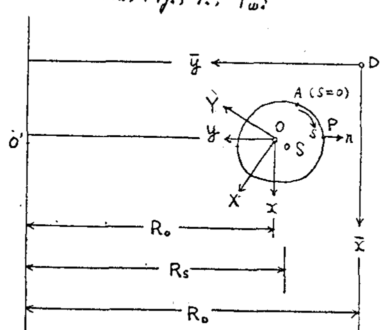


図-2

S点を通る軸線のたわみとねじれ角を

$$\left.\begin{aligned} u &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \\ \varphi &= b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

と近似する。表示を簡単にする為i点で$\theta=0$，j点で$\theta=\Phi$とし，$a_0 \sim a_3$と$b_0 \sim b_3$を節点自由度で表わすことができる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} u \\ \varphi \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e \tag{2}$$

$[N]$は形状関数でありθの3次式，また$\{\delta\}^e = \{u_i\ \phi_{yi}\ \varphi_i\ \psi_i\ u_j\ \phi_{yj}\ \varphi_j\ \psi_j\}^T$である。次に断面内の軸方向歪$\varepsilon_\theta$と，薄肉中心線に沿うせん断歪$\gamma_s$を歪の定義[2]に基づき，式(2)を用いて計算する。結果のみかくと

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\}^e \tag{3}$$

$[B]$の要素はθの2次式である。次に応力-歪関係

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \tag{4}$$

を用い，仮想仕事の原理を用いれば次式を得る。

$$\{F\}^e = \iiint_V [B]^T[D][B]\,dv \cdot \{\delta\}^e \tag{5}$$

ここで $\{F\}^e = \{Q_i\ M_{yi}\ T_i\ T_{\omega i}\ Q_j\ M_{yj}\ T_j\ T_{\omega j}\}^e$ であり，積分は要素 $i-j$ の全体積にわたって行う。これを $[K]$ とかくと，この内容は以下のようである。ただし $i-j$ 間で等断面の場合である。

$$k_{11} = \frac{12E}{R_s^3\Phi^3}J_y + \frac{6G}{5R_s^3\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^5\Phi^3}C_\omega, \quad k_{12} = \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}J_y + \frac{G}{10R_s^2}J_T + \frac{6E}{R_s^4\Phi^2}C_\omega, \quad k_{13} = -\frac{6E}{5R_s^2\Phi}J_y - \frac{6G}{5R_s^2\Phi}J_T - \frac{12E}{R_s^4\Phi^3}C_\omega,$$

$$k_{14} = -\frac{E}{10R_s}J_y - \frac{G}{10R_s}J_T - \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{15} = -\frac{12E}{R_s^3\Phi^3}J_y - \frac{6G}{5R_s^3\Phi}J_T - \frac{12E}{R_s^5\Phi^3}C_\omega, \quad k_{16} = \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}J_y + \frac{G}{10R_s^2}J_T + \frac{6E}{R_s^4\Phi^2}C_\omega,$$

$$k_{17} = \frac{6E}{5R_s^2\Phi}J_y + \frac{6G}{5R_s^2\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^4\Phi^3}C_\omega, \quad k_{18} = -\frac{E}{10R_s}J_y - \frac{G}{10R_s}J_T - \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{22} = \frac{4E}{R_s\Phi}J_y + \frac{2G\Phi}{15R_s}J_T + \frac{4E}{R_s^3\Phi}C_\omega,$$

$$k_{23} = -\frac{11E}{10R_s}J_y - \frac{G}{10R_s}J_T - \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{24} = -\frac{2E\Phi}{15}J_y - \frac{2G\Phi}{15}J_T - \frac{4E}{R_s^2\Phi}C_\omega, \quad k_{25} = -\frac{6E}{R_s^2\Phi^2}J_y - \frac{G}{10R_s^2}J_T - \frac{6E}{R_s^4\Phi^2}C_\omega,$$

$$k_{26} = \frac{2E}{R_s\Phi}J_y - \frac{G\Phi}{30R_s}J_T + \frac{2E}{R_s^3\Phi}C_\omega, \quad k_{27} = \frac{E}{10R_s}J_y + \frac{G}{10R_s}J_T + \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{28} = \frac{E\Phi}{30}J_y + \frac{G\Phi}{30}J_T - \frac{2E}{R_s^2\Phi}C_\omega,$$

$$k_{33} = \frac{13E\Phi}{35R_s}J_y + \frac{6G}{5R_s\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^3\Phi^3}C_\omega, \quad k_{34} = \frac{11E\Phi^2}{210}J_y + \frac{G}{10}J_T + \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}C_\omega, \quad k_{35} = \frac{6E}{5R_s^2\Phi}J_y + \frac{6G}{5R_s^2\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^4\Phi^3}C_\omega,$$

$$k_{36} = -\frac{E}{10R_s}J_y - \frac{G}{10R_s}J_T - \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{37} = \frac{9E\Phi}{70R_s}J_y - \frac{6G}{5R_s\Phi}J_T - \frac{12E}{R_s^3\Phi^3}C_\omega, \quad k_{38} = -\frac{12E\Phi^2}{420}J_y + \frac{G}{10}J_T + \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}C_\omega,$$

$$k_{44} = \frac{ER_s\Phi^3}{105}J_y + \frac{2GR_s\Phi}{15}J_T + \frac{4E}{R_s\Phi}C_\omega, \quad k_{45} = \frac{E}{10R_s}J_y + \frac{G}{10R_s}J_T + \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{46} = \frac{E\Phi}{30}J_y + \frac{G\Phi}{30}J_T - \frac{2E}{R_s^2\Phi}C_\omega,$$

$$k_{47} = \frac{13E\Phi^2}{420}J_y - \frac{G}{10}J_T - \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}C_\omega, \quad k_{48} = -\frac{ER_s\Phi^3}{140}J_y - \frac{GR_s\Phi}{30}J_T + \frac{2E}{R_s\Phi}C_\omega, \quad k_{55} = \frac{12E}{R_s^3\Phi^3}J_y + \frac{6G}{5R_s^3\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^5\Phi^3}C_\omega,$$

$$k_{56} = -\frac{6E}{R_s^2\Phi^2}J_y - \frac{G}{10R_s^2}J_T - \frac{6E}{R_s^4\Phi^2}C_\omega \quad k_{57} = -\frac{6E}{5R_s^2\Phi}J_y - \frac{6G}{5R_s^2\Phi}J_T - \frac{12E}{R_s^4\Phi^3}C_\omega, \quad k_{58} = \frac{E}{10R_s}J_y + \frac{G}{10R_s}J_T + \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega.$$

$$k_{66} = \frac{4E}{R_s\Phi}J_y + \frac{2G\Phi}{15R_s}J_T + \frac{4E}{R_s^3\Phi}C_\omega, \quad k_{67} = \frac{11E}{10R_s}J_y + \frac{G}{10R_s}J_T + \frac{6E}{R_s^3\Phi^2}C_\omega, \quad k_{68} = -\frac{2E\Phi}{15}J_y - \frac{2G\Phi}{15}J_T - \frac{4E}{R_s^2\Phi}C_\omega$$

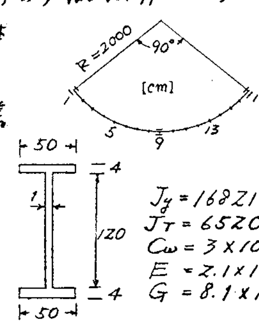
$$k_{77} = \frac{13E\Phi}{35R_s}J_y + \frac{6G}{5R_s\Phi}J_T + \frac{12E}{R_s^3\Phi^3}C_\omega, \quad k_{78} = -\frac{11E\Phi^2}{210}J_y - \frac{G}{10}J_T - \frac{6E}{R_s^2\Phi^2}C_\omega, \quad k_{88} = \frac{ER_s\Phi^3}{105}J_y - \frac{2GR_s\Phi}{15}J_T - \frac{4E}{R_s\Phi}C_\omega.$$

以上で J_y，J_T，C_ω はせん断中心に関する曲げ剛性，ねじれ剛性，曲げねじれ剛性である。

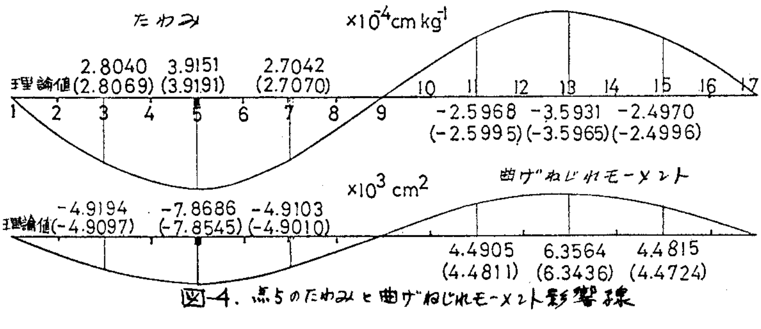
3. 計算例

図−3のような断面をもつ2径間連続げたを，全体で16分割し，そのうち節点5のたわみと曲げねじりモーメントの影響線を示す。カッコ内は理論値[3]であり，たわみは0.1%，曲げねじりモーメントは0.2%以下の誤差

図−3



$J_y = 1682133\ \mathrm{cm^4}$
$J_T = 6520\ \mathrm{cm^4}$
$C_\omega = 3\times10^8\ \mathrm{cm^6}$
$E = 2.1\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$
$G = 8.1\times10^5\ \mathrm{kg/cm^2}$



図−4．点5のたわみと曲げねじれモーメント影響線

1) 渡辺他「曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックスによる解析」論文集217号
2) 深沢「薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論」論文集110号
3) 渡辺昇「曲線げたの理論と計算」技報堂