

川崎重工業 正員 坂井藤一
電力中央研究所 正員 ○中村秀治

1. まえがき 薄肉曲線桁の解析手法についてはすでに多くの研究成果が発表されており、実際の構造物の設計にも適用されている。それらは、直線桁と同様に、断面変形を考慮しないものと考慮するものに大きく分けられ、前者が曲線桁の設計に有用なのに対して後者は断面変形挙動と中間ダイヤフラムの効果の検討に有効である。本報告は後者に属し、先に筆者らが参考文献(1)、(2)で直線桁について述べた解析方法を曲線桁に拡張したものである。薄肉曲線桁を扇形板要素と曲板要素から構成されているものと考え、要素内の変位を多項式で近似すると、それぞれの要素の節線変位、節線外力の関係が変分原理のもとでマトリクス関係式で示される。そこで扇形板および曲板要素の剛性マトリクス、質量マトリクスの誘導とそれを用いた薄肉曲線桁の静的・動的解析法について以下に考察する。

2. 扇形板要素の剛性マトリクス、質量マトリクス

扇形板の面内および面外の平衡方程式は次のとおりである。

$$\frac{1}{R_i+S} \frac{\partial N_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{ys}}{\partial S} + \frac{2}{R_i+S} N_{ys} + P_y - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_i+S} \frac{\partial N_{ys}}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_s}{\partial S} + \frac{1}{R_i+S} (N_s - N_{\varphi}) + P_s - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{(R_i+S)^2} \frac{\partial^2 M_y}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R_i+S} \frac{\partial^2 M_{ys}}{\partial \varphi \partial S} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial S^2} + \frac{1}{R_i+S} \left(\frac{2}{R_i+S} \frac{\partial M_{ys}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial M_s}{\partial S} - \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial S} \right) + P_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 P_y, P_s, P_{φ} はそれぞれ φ, S, φ 軸方向の単位面積当り分布荷重であり、 $N_y, N_{ys}, \dots$ は次に示すものである。

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_s) \quad (4)$$

$$N_s = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_y) \quad (5)$$

$$N_{ys} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{ys} \quad (6)$$

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\mu_y + \nu \mu_s) \quad (7)$$

$$M_s = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\mu_s + \nu \mu_y) \quad (8)$$

$$M_{ys} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \mu_{ys} \quad (9)$$

$$\epsilon_y = \frac{u}{R_i+S} + \frac{1}{R_i+S} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{1}{R_i+S} (u^{(0)} u_i + u^{(1)} u_i) + \frac{1}{R_i+S} (w^{(0)} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} + w^{(1)} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi}) \quad (10)$$

$$\epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial S} u_i + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial S} u_i \quad (11)$$

$$\gamma_{ys} = \frac{1}{R_i+S} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{w}{R_i+S} = \frac{1}{R_i+S} (u^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + u^{(1)} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi}) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial S} w_i + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial S} w_i - \frac{1}{R_i+S} (w^{(0)} w_i + w^{(1)} w_i) \quad (12)$$

$$\mu_y = -\frac{1}{R_i+S} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{(R_i+S)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial S} = -\frac{1}{R_i+S} \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \varphi^2} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \varphi^2} v_i + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} v_i \right) - \frac{1}{(R_i+S)^2} \left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \varphi^2} w_i + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \varphi^2} w_i + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} w_i + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} w_i \right) \quad (13)$$

$$\mu_s = -\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = -\left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial S^2} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial S^2} v_i + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial S^2} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial S^2} v_i \right) \quad (14)$$

$$\mu_{ys} = \frac{-1}{R_i+S} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial S} + \frac{1}{R_i+S} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial S} = \frac{-1}{R_i+S} \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} v_i + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} v_i + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} v_i \right) + \frac{1}{(R_i+S)^2} \left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} w_i + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} w_i + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \varphi \partial S} w_i + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \varphi \partial S} w_i \right) \quad (15)$$

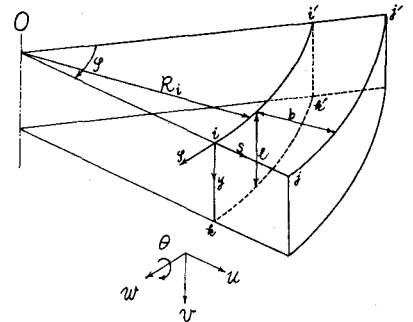


図-1 薄肉曲線桁の要素分割

$w(\varphi, S, t)$, $u(\varphi, S, t)$ はそれぞれ φ, S 軸方向の面内変位、 $v(\varphi, S, t)$ は面外変位、 $w_i, u_i, \dots, w_j, u_j, \dots$ は i, j 辺の節線変位、 b は扇形板要素板幅として、図-1 に示す扇形板要素 i, j について、次の変位関数と仮定している。

$$w(\varphi, S, t) = \left(1 - \frac{S}{b}\right) w_i(\varphi, t) + \frac{S}{b} w_j(\varphi, t) = w^{(0)}(s) w_i(\varphi, t) + w^{(1)}(s) w_j(\varphi, t) \quad (16)$$

$$u(\varphi, S, t) = \left(1 - \frac{S}{b}\right) u_i(\varphi, t) + \frac{S}{b} u_j(\varphi, t) = u^{(0)}(s) u_i(\varphi, t) + u^{(1)}(s) u_j(\varphi, t) \quad (17)$$

$$v(\varphi, S, t) = \left(1 - \frac{3}{b^2} S^2 + \frac{2}{b^3} S^3\right) v_i(\varphi, t) + \left(S - \frac{2}{b} S^2 - \frac{1}{b^2} S^3\right) \theta_i(\varphi, t) + \left(\frac{3}{b^2} S^2 - \frac{2}{b^3} S^3\right) v_j(\varphi, t) + \left(-\frac{1}{b} S^2 + \frac{1}{b^2} S^3\right) \theta_j(\varphi, t) \\ = v^{(0)}(s) v_i(\varphi, t) + \theta^{(0)}(s) \theta_i(\varphi, t) + v^{(1)}(s) v_j(\varphi, t) + \theta^{(1)}(s) \theta_j(\varphi, t) \quad (18)$$

これより、重み残差法としての Galerkin法を用いると、次の節線変位、節線外力(左辺)の関係式が導かれる。

$$\begin{Bmatrix} W_i(\varphi, t) \\ U_i(\varphi, t) \\ V_i(\varphi, t) \\ \Theta_i(\varphi, t) \\ W_s(\varphi, t) \\ U_s(\varphi, t) \\ V_s(\varphi, t) \\ \Theta_s(\varphi, t) \end{Bmatrix} = \left\{ [M^R] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + [K_1^R] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^4 + [K_2^R] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 + [K_3^R] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + [K_4^R] \right\} \begin{Bmatrix} w_i(\varphi, t) \\ u_i(\varphi, t) \\ v_i(\varphi, t) \\ \theta_i(\varphi, t) \\ w_s(\varphi, t) \\ u_s(\varphi, t) \\ v_s(\varphi, t) \\ \theta_s(\varphi, t) \end{Bmatrix} \quad \text{----- (19)}$$

3. 曲板要素の剛性マトリクス, 質量マトリクス

Donnellの円筒殻の理論に従えば、曲板要素の面内および面外の平衡方程式は次のとおりである。

$$\frac{1}{R_i} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + p_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{R_i} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + p_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R_i} \frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{N_\varphi}{R_i} + p_s - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (22)$$

ここで、 $p_\varphi, p_\varphi, p_s$ はそれぞれ φ, φ, s 軸方向の単位面積当り分布荷重であり、 $N_\varphi, N_\varphi, \dots$ は次に示すものである。

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\varphi) \quad \text{----- (23)} \quad M_\varphi = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_\varphi + \nu K_\varphi) \quad \text{----- (24)}$$

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\varphi) \quad \text{----- (24)} \quad M_\varphi = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (K_\varphi + \nu K_\varphi) \quad \text{----- (25)}$$

$$N_{\varphi\varphi} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{\varphi\varphi} \quad \text{----- (25)} \quad M_{\varphi\varphi} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} K_{\varphi\varphi} \quad \text{----- (26)}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_i} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{R_i} = \frac{1}{R_i} (w^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} + w^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial \varphi}) + \frac{1}{R_i} (u^{(i)} u_i - \theta^{(i)} \theta_i + u^{(s)} u_s - \theta^{(s)} \theta_s) \quad \text{----- (27)}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_s}{\partial \varphi} \quad \text{----- (28)}$$

$$\gamma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R_i} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{1}{R_i} (v^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + v^{(s)} \frac{\partial v_s}{\partial \varphi}) + \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_s}{\partial \varphi} \quad \text{----- (29)}$$

$$K_\varphi = -\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{R_i^2} (u^{(i)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} - \theta^{(i)} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \varphi^2} + u^{(s)} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi^2} - \theta^{(s)} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi^2}) \quad \text{----- (30)}$$

$$K_\varphi = -\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} u_i - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \varphi^2} \theta_i + \frac{\partial^2 u_s}{\partial \varphi^2} u_s - \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \varphi^2} \theta_s) \quad \text{----- (31)}$$

$$K_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{R_i} (\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta_s}{\partial \varphi}) \quad \text{----- (32)}$$

$w(\varphi, \varphi, t), v(\varphi, \varphi, t)$ はそれぞれ φ, φ 軸方向の面内変位、 $u(\varphi, \varphi, t)$ は面外変位、 $w_i, u_i, \dots, w_s, u_s, \dots$ は、 i, s 辺の節線変位、 h は曲板要素の板幅として、図-1に示す曲板要素 i, s について、次の変位関数を仮定している。

$$w(\varphi, \varphi, t) = (1 - \frac{\varphi}{l}) w_i(\varphi, t) + \frac{\varphi}{l} w_s(\varphi, t) = w^{(i)}(\varphi) w_i(\varphi, t) + w^{(s)}(\varphi) w_s(\varphi, t) \quad \text{----- (33)}$$

$$u(\varphi, \varphi, t) = (1 - \frac{3}{l^2} \varphi^2 + \frac{2}{l^2} \varphi^3) u_i(\varphi, t) - (\varphi - \frac{\varphi^2}{l} + \frac{1}{l^2} \varphi^3) \theta_i(\varphi, t) + (\frac{3}{l^2} \varphi^2 - \frac{2}{l^2} \varphi^3) u_s(\varphi, t) - (\frac{1}{l^2} \varphi^2 + \frac{1}{l^2} \varphi^3) \theta_s(\varphi, t) \quad \text{----- (34)}$$

$$= u^{(i)}(\varphi) u_i(\varphi, t) - \theta^{(i)}(\varphi) \theta_i(\varphi, t) + u^{(s)}(\varphi) u_s(\varphi, t) - \theta^{(s)}(\varphi) \theta_s(\varphi, t) \quad \text{----- (35)}$$

$$v(\varphi, \varphi, t) = (1 - \frac{\varphi}{l}) v_i(\varphi, t) + \frac{\varphi}{l} v_s(\varphi, t) = v^{(i)}(\varphi) v_i(\varphi, t) + v^{(s)}(\varphi) v_s(\varphi, t) \quad \text{----- (36)}$$

これより、重み残差法としての Galerkin法を用いると、次の節線変位、節線外力(左辺)の関係式が導かれる。

$$\begin{Bmatrix} W_i(\varphi, t) \\ U_i(\varphi, t) \\ V_i(\varphi, t) \\ \Theta_i(\varphi, t) \\ W_s(\varphi, t) \\ U_s(\varphi, t) \\ V_s(\varphi, t) \\ \Theta_s(\varphi, t) \end{Bmatrix} = \left\{ [M^{sR}] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + [K_1^{sR}] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^4 + [K_2^{sR}] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 + [K_3^{sR}] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + [K_4^{sR}] \right\} \begin{Bmatrix} w_i(\varphi, t) \\ u_i(\varphi, t) \\ v_i(\varphi, t) \\ \theta_i(\varphi, t) \\ w_s(\varphi, t) \\ u_s(\varphi, t) \\ v_s(\varphi, t) \\ \theta_s(\varphi, t) \end{Bmatrix} \quad \text{----- (38)}$$

4. 数値計算方法 式(19)および(38)を薄肉曲線板の形状に従って重ね合わせることににより、板全体の方程式が作られる。さらに、その方程式を解くための方法はいくつか考えられるが、両端単純支持の場合、級数解法が適当である。なお、剛性マトリクス、質量マトリクスと数値計算結果については当日スライドで示す。

参考文献 (1) 奥村敏彦・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用、土木学会論文報告集、No.176、1970年4月 (2) 中村秀治：断面変形を考慮した薄肉板の振動解析、土木学会論文報告集、No.223、1974年3月 (3) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959 (4) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968