

山梨大学工学部 正員 深沢 泰 晴

山梨大学大学院 学生員 〇 河 西 晴 征

1. はじめに

直線材との比較における曲線材の特徴は、①材を構成するすべての母線が曲率をもっていること、②しかもその曲率が母線ごとに異なることの2つである。薄肉曲線材に対していわゆる「曲げねじれ理論」の適用を試みた研究は非常に多いが、その大部分は②の特徴である各母線の曲率の差異についてなんらかの近似的な措置を、その定式化の過程で講じている。これに対して、母線ごとの曲率の変化を完全な形で考慮した解析は、小西・小松論文¹⁾を端緒として、ひとり我が国においてのみその発展がなされてきた。^{2), 3), 4)}このような解析ははりの曲率半径に対する曲率半径方向の断面寸法の比が大きくなるにつれて、その有効性を増すのは当然であるが、なかんづく理論展開がすっきりした形でなされ得る点で評価されるべきものと思う。しかしながらその反面、この理論によれば諸種の断面定数を与える断面積分が母線ごとに異なる曲率を含んでいるため、実際の設計計算においては面倒な積分演算を強いられ、その意味では実用的でないという面がある。

本報告では、この理論の特徴を生かしつつ、上記のような欠陥を補う目的で、通常の曲げねじれ問題の解析法とは若干異なる手法を適用して解析を行なってみた。すなわち、実用に供されている鋼曲線げたのほとんどが平板から構成されている点に着目し、その構成要素である個々の板帯を基本要素として解析し、それをけたとして集合する解析法である。この方法によれば、個々の平板に対しては曲率を含んだ断面積分が容易に行なえるなど前記の欠陥が改善され、実用計算に便利な表式が与えられる利点がある。今回は閉断面の場合についてその概略を報告する。

2. 構成要素としての円弧状板帯の解析

図-1に示すような薄肉多角閉断面の曲線げたを扱う。まずその構成要素である i 番目の板帯（以下 i -plate と記す）をとり出して考える。 i -plate の断面上の任意点 P および i -plate の断面上の中立点 O_i の x, y, θ 方向への変位をそれぞれ u, v, w および u_i, v_i, w_i とし、断面のねじれ回転角を φ とすると、両者の間には次式が書ける；

$$\left. \begin{aligned} u &= u_i - \tilde{y}\varphi, \quad v = v_i + \tilde{x}\varphi \\ w &= w_i - \tilde{y}\phi_{xi} + \tilde{x}\phi_{yi} + \frac{1}{2}(1 + \beta/\rho)\tilde{z}_i\eta\phi_{zi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 $\phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}$ は O_i 軸の $\tilde{x}, \tilde{y}$ 軸まわりのたねみ角およびねじり率で、 $\phi_{xi} = (u_i' + w_i)/\rho$, $\phi_{yi} = v_i'/\rho$, $\phi_{zi} = (\varphi - u_i/\rho)/\rho$ $\dots\dots(2)$

タッチェ()' は θ に関する微分の表し。 $\tilde{z}_i$ は i -plate における St. Venant のせん断流を $g_i = \tilde{z}_i t_i$ とするとき $\tilde{z}_i = (\beta/\rho)^2 G \phi_{zi} \tilde{z}_i$ $\dots\dots(3)$

座標系 ($O_i - \tilde{x}, \tilde{y}$), ($O_i - \tilde{z}, \eta$), ($O_i - \rho, \theta$) および ρ については図-1および図-2参照。

i -plate の任意点 P におけるひずみ成分は式(1)より

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= (\beta/\rho)\{\tilde{z}_i - \tilde{y}K_{xi} - \tilde{x}K_{yi} + \frac{1}{2}(1 + \beta/\rho)\tilde{z}_i\eta\phi_{zi}\} \\ \gamma_{\theta\phi} &= (\beta/\rho)^2\tilde{z}_i\phi_{zi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

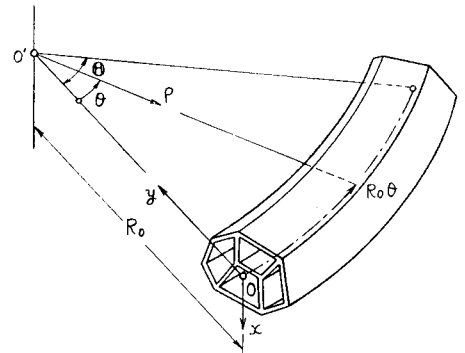


図-1 薄肉多角閉断面の曲線げた

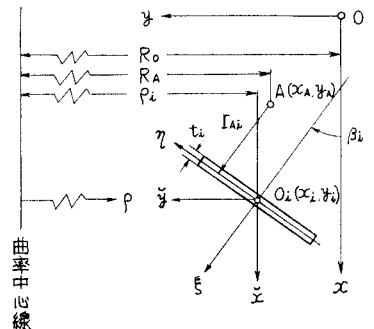


図-2 板帯断面

ここに, $E_i = (w_i' - v_i)/\rho_i$, $K_{xi} = (v_i' + w_i')/\rho_i^2$, $K_{yi} = (u_i' + \rho_i \varphi')/\rho_i^2$, $\varphi_{xi} = (\varphi'' - u_i'/\rho_i)/\rho_i^2$ - - - - - (5)
したがって, 式 (4) を用いて i -plate に蓄えられるひずみエネルギー Π_i は次式のように書ける;

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{F_i} (E J_{xi} K_{xi}^2 + E J_{yi} K_{yi}^2 + 2 E J_{xyi} K_{xi} K_{yi} + E C_{\omega i} \varphi_{xi}^2 + 2 E C_{xi} K_{xi} \varphi_{xi} + 2 E C_{yi} K_{yi} \varphi_{xi} + G J_{Ti} \psi_{xi}^2 + E F_i E_i^2) \rho_i^2 d\theta \quad (6)$$

ここに, $J_{xi} = \cos^2 \beta_i \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \eta^2 dF_i$, $J_{yi} = \sin^2 \beta_i \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \eta^2 dF_i$, $J_{xyi} = -\sin \beta_i \cos \beta_i \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} \eta^2 dF_i$
 $C_{xi} = -\frac{1}{2} \bar{c}_i \cos \beta_i \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} (1 + \frac{\rho_i}{\rho}) \eta^2 dF_i$, $C_{yi} = \frac{1}{2} \bar{c}_i \sin \beta_i \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} (1 + \frac{\rho_i}{\rho}) \eta^2 dF_i$, $C_{\omega i} = \frac{1}{4} \bar{c}_i^2 \int_{F_i} \frac{\rho_i}{\rho} (1 + \frac{\rho_i}{\rho})^2 \eta^2 dF_i$ } - - - - - (7)
 F_i は i -plate の断面積を表わし, これらの断面積分は $\rho = \rho_i - \eta \cos \beta_i$ を考慮することによって容易に行なえる。

3. 曲線げたとしての基本式

断面上に任意に選んだ極 A の x , y , θ 方向への変位をそれぞれ u_A , v_A , w_A とすると, O_i 点の変位と A 点の変位との間には次式の関係が成り立つ;

$$u_i = u_A - (y_i - y_A) \varphi, \quad v_i = v_A + (x_i - x_A) \varphi, \quad w_i = w_A - (y_i - y_A) \phi_{xA} - (x_i - x_A) \phi_{yA} - \omega_{Ai} \psi_{xA} \quad (8)$$

ここに, x_i, y_i および x_A, y_A はそれぞれ断面の中立点 O を原点とする座標系 ($O-x, y$) における O_i 点および A 点の座標。 $\phi_{xA}, \phi_{yA}, \psi_{xA}$ は A 軸の x , y 軸まわりのたわみ角およびねじれ率であり, 次式で表わされる;

$$\phi_{xA} = (v_A' + w_A)/R_A, \quad \phi_{yA} = u_A'/R_A, \quad \psi_{xA} = (\varphi' - u_A'/R_A)/R_A \quad (9)$$

式 (6) における O_i 点に関する量 $E_i, K_{xi}, K_{yi}, \varphi_{xi}$ を A 点に関する量で表わすと 式 (5), (9) より

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \frac{R_0}{R_i} E_0 - \frac{R_A}{R_i^2} (y_i K_{xA} + x_i K_{yA} + \omega_{Ai} \varphi_{xA}), \quad K_{xi} = \frac{R_A}{R_i^2} K_{xA} + \frac{R_A^2}{R_i^3} (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A}) \varphi_{xA} \\ K_{yi} &= \frac{R_A}{R_i^2} K_{yA} - \frac{R_A^2}{R_i^3} (y_i - y_A) \varphi_{xA}, \quad \varphi_{xi} = \frac{R_A^2}{R_i^3} \varphi_{xA} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに, 中立点 O の y , θ 方向への変位をそれぞれ v_0, w_0 とし, $E_0 = (w_0' - v_0)/R_0$ } - - - - - (11)
また, $K_{xA} = (v_A'' + w_A')/R_A^2$, $K_{yA} = (u_A'' + R_A \varphi')/R_A^2$, $\varphi_{xA} = (\varphi'' - u_A'/R_A)/R_A^2$

結局, 曲線げたを n 枚の板帯の集合としてとらえるとき全体の歪エネルギー $\Pi (= \sum_{i=1}^n \Pi_i)$ は式 (6), (10) より

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R_A}{R_0} E J_{xi} K_{xi}^2 + \frac{R_A}{R_0} E J_{yi} K_{yi}^2 + 2 \frac{R_A}{R_0} E J_{xyi} K_{xi} K_{yi} + E C_{\omega i} \varphi_{xi}^2 + 2 E C_{xi} K_{xi} \varphi_{xi} + 2 E C_{yi} K_{yi} \varphi_{xi} + G J_{Ti} \psi_{xi}^2 + \frac{R_0}{R_A} E F_i E_i^2 \right\} R_i d\theta \quad (12)$$

ここに, $J_x = \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i^2} (J_{xi} + F_i y_i^2)$, $J_y = \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i^2} (J_{yi} + F_i x_i^2)$, $J_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i^2} (J_{xyi} + F_i x_i y_i)$
 $C_{\omega A} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_0^3}{R_i^3} C_{\omega i} + 2 \frac{R_0^2}{R_i^2} C_{xi} (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A}) - 2 \frac{R_0^2}{R_i^2} C_{yi} (y_i - y_A) + \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{xi} (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A})^2 \right.$
 $\left. + \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{yi} (y_i - y_A)^2 - 2 \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{xyi} (y_i - y_A) (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A}) + \frac{R_0}{R_i^2} F_i \omega_{Ai}^2 \right\}$
 $C_{xA} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_0^3}{R_i^3} C_{xi} + \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{xi} (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A}) - \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{xyi} (y_i - y_A) + \frac{R_0}{R_i^2} F_i y_i \omega_{Ai} \right\}$
 $C_{yA} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{R_0^3}{R_i^3} C_{yi} - \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{yi} (y_i - y_A) + \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{xyi} (x_i - x_A - \frac{\omega_{Ai}}{R_A}) + \frac{R_0}{R_i^2} F_i x_i \omega_{Ai} \right\}$, $J_{TA} = \sum_{i=1}^n \frac{R_0^2}{R_i^2} J_{Ti}$ } - - - - - (13)

式 (6), (10), (13) に含まれる ω_{Ai} は各板帯の接合部における w の連続の条件より定められる⁵⁾ w は式 (1), (8) より

$$w = w_A - (y - y_A) \phi_{xA} - (x - x_A) \phi_{yA} - \left\{ \frac{\rho}{R_A} \omega_{Ai} + \frac{R_A}{R_i} \left[\omega_{Ai} \eta - \frac{1}{2} \frac{R_A^2}{R_i^2} (1 + \frac{\rho}{R_A}) \bar{c}_i \eta \right] \right\} \psi_{xA} \quad (14)$$

4. セン断中心

極 S を主極すなわちセン断中心とすると, S の座標 x_s, y_s は次式によって定められる;

$$C_{xs} = \frac{R_0^3}{R_A^3} C_{xA} + \frac{R_0^2}{R_A^2} \left(\frac{R_0}{R_A} x_A - x_s \right) J_x - \frac{R_0^2}{R_0 R_A} (y_A - y_s) J_{xy} = 0, \quad C_{ys} = \frac{R_0^3}{R_A^3} C_{yA} - \frac{R_0^2}{R_A R_0} (y_A - y_s) J_y + \frac{R_0^2}{R_A^2} \left(\frac{R_0}{R_A} x_A - x_s \right) J_{xy} = 0 \quad (15)$$

すなわち,

$$x_s - x_A = \frac{R_0^2}{R_A^2} \frac{C_{xA} (J_y - \frac{x_A}{R_0} J_{xy}) - C_{yA} (J_{xy} - \frac{x_A}{R_0} J_x)}{J_x (J_y - \frac{R_0}{R_A} C_{yA}) - J_{xy} (J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA})}, \quad y_s - y_A = -\frac{R_0}{R_A} \frac{C_{yA} J_x - C_{xA} J_{xy}}{J_x (J_y - \frac{R_0}{R_A} C_{yA}) - J_{xy} (J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA})} \quad (16)$$

このとき, C_{ws} は;

$$C_{ws} = \frac{R_0^3}{R_A^3} \left\{ \frac{R_0^2}{R_A^2} C_{\omega A} - \frac{R_0}{R_A} (x_s - \frac{R_0}{R_A} x_A) C_{xA} + \frac{R_0}{R_A} (y_s - y_A) C_{yA} \right\} \quad (17)$$

文献 1) 小西・小松: 土木学会論文集, No. 87 (1962-11). 2) 倉西: 土木学会論文集, No. 108 (1964-8). 3) 深沢: 土木学会論文集, No 110 (1964-10). 4) 面野: Proc. of A. S. C. E. 投稿中, 5) 深沢・内田: 土木学会学術講演会概要集, (1973-10).